# 9.3 Optimering

Eksempel (oppg 9.31) Vi skal sette opp et gjerde som er 100 meter langt inntil en (lang) vegg slik at avgrenset område er et rektangel


Hvor langt ut fra veggen skal gjerde settes opp for at arealet til det avgrensede området skal være størst?

Lengden på gjerde $2x + y = 100\text{m}$
Arealet til rektangelet $A = x \cdot y$

Uttrykker $y$ ved hjelp av $x$: $y = 100 - 2x$
$A(x) = x(100 - 2x)$ $(0 < x < 50)$

Vi ønsker å finne $x$ slik at $A(x)$ er størst.
$A'(x) = (100x - 2x^2)' = 100 - 4x$

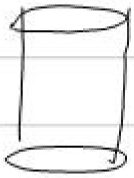
Så $A'(x) = 0$ når $\underline{x = 25\text{m}}$

( $A''(x) = -4$ $A(x)$ er konkav nedover $\frown$ )

$A(x)$ er størst når $\underline{x = 25\text{m}}$

$y$ er da $y = 100\text{m} - 2 \cdot 25\text{m} = \underline{50\text{m}}$

Eksempel   Hvilke forhold mellom diameter og høyde til en brusboks vil gi minst overflate areal for et gitt volum.



høyde H

D diameter

$$A = \underbrace{H \cdot \pi \cdot D}_{\text{sylinderen}} + \underbrace{2\left(\pi \cdot D^2/4\right)}_{\text{topp og bunn}}$$

$$V = H \cdot \pi \cdot D^2/4 \quad (\text{konstant})$$

$D = 2 \cdot r$

$r$ radius

$$H = \frac{V}{\pi \cdot D^2/4} = \frac{4V}{\pi \cdot D^2}$$ setter dette inn for høyden i $A(D,H)$:

$$A(D) = \frac{4V}{\pi \cdot D^2} \cdot \pi \cdot D + 2\,\frac{\pi}{4}\left(D^2\right)$$
$$= \frac{4V}{D} + \frac{\pi}{2} D^2 .$$

$$A'(D) = \frac{-4V}{D^2} + \pi \cdot D = 0$$

har løsning $+\frac{4V}{D^2} = \pi \cdot D$ : $D = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

$$\left( 4V = \pi \cdot D^3 \Rightarrow \underline{\frac{4V}{\pi} = D^3} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{D^3} = D \right)$$

$$\frac{H}{D} = \left(\frac{4V}{\pi \cdot D^2}\right)\frac{1}{D} = \frac{4V}{\pi \cdot D^3} = \frac{4V}{\pi(4V/\pi)} = 1$$

Så høyden og diameteren må vere like store for at (overflate) arealet skal vere minst mulig for et gitt volum.

# Andrederivert testen

Anta $f'(a)=0$.

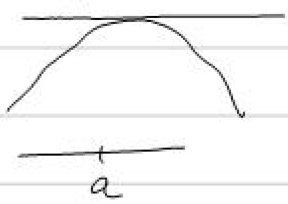
Vi gir en test for å avgjøre om $(a,f(a))$ er et maksimumspunkt (toppunkt) eller et minimumspunkt (bunnpunkt).

Hvis $f'(a)=0$ og $f''(a)<0$ så er $(a,f(a))$ et lokalt maksimumspunkt

Hvis $f'(a)=0$ og $f''(a)>0$ så er $(a,f(a))$ et lokalt minimumspunkt.

Hvis $f'(a)=0$ og $f''(a)=0$ så gir testen ingen konklusjon (enten maks, min eller ingen av delene)

toppunkt




$f'(a)=0$

$f''(a)<0$

konkav ned

bunn punkt.

$f'(a)=0$

$f''(a)>0$

konkav opp

eks $f'(0)=0$, $f''(0)=0$

$f(x)=x^4$ $(0,f(0))$ bunnpunkt

$f(x)=-x^4$ $(0,f(0))$ toppunkt

$f(x)=x^3$ ikke topp eller bunnpunkt i $(0,f(0))$.

Eksempel

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$$

$$f''(x) = 6 \cdot x$$

Kritiske punkt når $x = -1$ eller $x = 1$

$(f'(x) = 0)$

$f''(-1) = -6 < 0$ , $f''(1) = 6 > 0$

Fra andrederiverttesten så er

$(-1, f(-1)) = (-1, 2)$ er et lokalt toppunkt

$(1, f(1)) = (1, -2)$ er et lokalt bunnpunkt.