Mandag 12 januar 09 8.4

En funksjon f vokser (øker, stiger) på et intervall D hvis $f(x_1) < f(x_2)$ for alle $x_1 < x_2$ i D.

En funksjon f avtar (minker, synker) på et intervall D hvis $f(x_1) > f(x_2)$ for alle $x_1 < x_2$ i D.

I noen sammenhenger kreves bare at $f(x_1) \leq f(x_2)$ (eventuelt $f(x_1) \geq f(x_2)$). Man sier da gjerne at f er ekte voksende hvis ulikheten $\geq$ er ekte.

* f er voksende i D $\Leftrightarrow$ $-f$ er avtagende i D.

* Hvis $f(x)$ har egenskapen at $f'(x) > 0$ i en åpen intervall (a, b), da er f voksende i (a, b).

Eks $f(x) = 2$ (konstant funksjon)
er verken voksende eller avtagende for noen intervall.

$f(x) = 2x - 1$ er voksende (for alle intervaller)

$f(x) = x^2$ er voksende for $x \geq 0$
og avtagende for $x \leq 0$.

$f(x) = x^3$ er voksende på hele den reelle akse $\mathbb{R}$.

Et punkt $(z, f(z))$ på grafen til f er et stasjonært punkt hvis $f'(z) = 0$.

Bøker bruker dette begrepet

La f være en funksjon med definisjonsmengde D.
De kritiske punktene til f er punkt $(z, f(z))$ på grafen til f slik at

1) z er et randpunkt i D

eller 2) $f'(z)$ eksisterer ikke

eller 3) $f'(z) = 0$

$(z, f(z))$ er ikke et randpunkt $\iff$
z ligger i det indre av D og $f'(z) \neq 0$.

Definisjonen av den deriverte gir at
Hvis $f'(z) > 0$ og z er i det indre av D,
da finnes det en $\epsilon > 0$ slik at $(z-\epsilon, z+\epsilon) \subset D$
og $f(x) < f(z)$ for $z-\epsilon < x < z$

$f(z) < f(x)$ for $z < x < z+\epsilon$.

La f være definert på D.

$(z, f(z))$ er et lokalt toppunkt (maksimumspunkt) for f hvis det finnes en $\epsilon > 0$ slik at

$f(x) \le f(z)$ for alle $x \in D \cap (z-\epsilon, z+\epsilon)$

"$f(z)$ er største verdi til f i en åpen omegn om z."

$(z, f(z))$ er et globalt toppunkt (minimumspunkt) for f hvis $f(z) \ge f(x)$ for alle $x \in D$.

Tilsvarende for (lokalt) bunnpunkt / minimumspunkt.

Vi setter sammen resultatene og definisjonene ovenfor:

Hvis $(z, f(z))$ er et lokalt topp eller bunnpunkt, da er $(z, f(z))$ et kritisk punkt.

Så for å finne ekstremalverdier til f er det tilstrekkelig å undersøke blandt de kritiske punktene.

For eksempel: 1) hvis $f'(z) = 0$ og $f'(x) < 0$ til venstre for z og $f'(x) > 0$ til høyre for z så er $(z, f(z))$ et lokalt minimumspunkt.

2) hvis $f'(z) = 0$ og $f'(x) > 0$ både til venstre og høyre for z, så er $(z, f(z))$ verken et maks. eller min. punkt.

Vi gikk gjennom en del eksempel på tavla.

Finn monotoniegenskapene, kritiske punkt, ekstremalverdier til følgende funksjoner:

1) $f(x) = 2$ på $\mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x - 1$ på $[1, 2)$

3) $f(x) = x^2$ på $\mathbb{R}$
på $[1, 2]$
på $[-1, 1]$
på $(-1, 2)$

4) $f(x) = x^3$ på $\mathbb{R}$

5)
$$f(x) = \begin{cases} x & -2 < x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 2 \\ 8 - 2x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

oppg 8.42 a) Finn toppunkt, bunnpunkt, monotoniegenskapene til $f(x) = x^2 - 4x + 1$ på $\mathbb{R}$

$f'(x) = (x^2)' - 4(x)' + (1)' = \underline{2x - 4}$

$f'(x) = 0$ for $x = 2$ Kritiske punkt er $(2, 1)$.

0 2

$f'(x)$ — — — — — - 0 + + + + +

f avtagende for $x \leq 2$, økende for $x \geq 2$

bunnpunkt i $(1, 2)$.