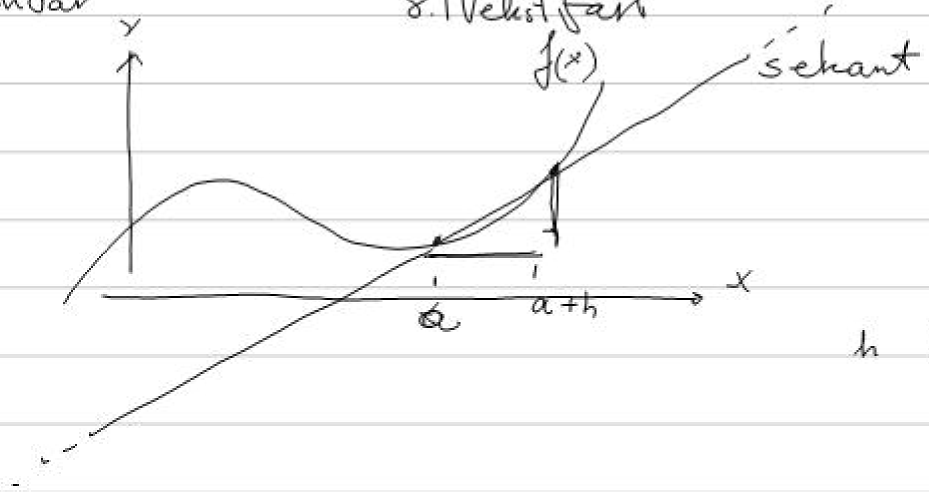
Tors. 8 januar

8.1 Vekstfart



h liten endring

$$\frac{\text{endring i } f}{\text{endring i } x} : \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Gjennomsnittlig vekstfart i intervallet $[a, a+h]$

Eksempel: Hvis $S(t)$ er posisjonen til en partikkel i tiden t (langs en akse) så er gjennomsnittlig vekstfart i intervallet $[t, t+h]$ gjennomsnittsfarten til partikkelen i tidsintervallet $[t, t+h]$.

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \frac{\text{forflytning}}{\text{tid}}.$$

(Vekstfart kalles også endringsrate)

Vekstfarten er stigningstallet til sekanten (se figur ovenfor)

Eksempler:

1) $$f(x) = x^2$$

Gjennomsnittlig vekstfart i intervallen $[a, a+h]$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \frac{a^2 + 2a \cdot h + h^2 - a^2}{h} = \underline{2a + h}$$

2) $$f(x) = \sqrt{x} \qquad a, a+h \geq 0$$

Gjennomsnittlig vekstfart i intervallen $[a, a+h]$ er

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \left(\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}\right) \frac{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{(a+h) - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

3) $$f(x) = \frac{1}{x} \qquad a, \quad a+h \neq 0$$

Gjennomsnittlig vekstfart i intervallen $[a, a+h]$ er

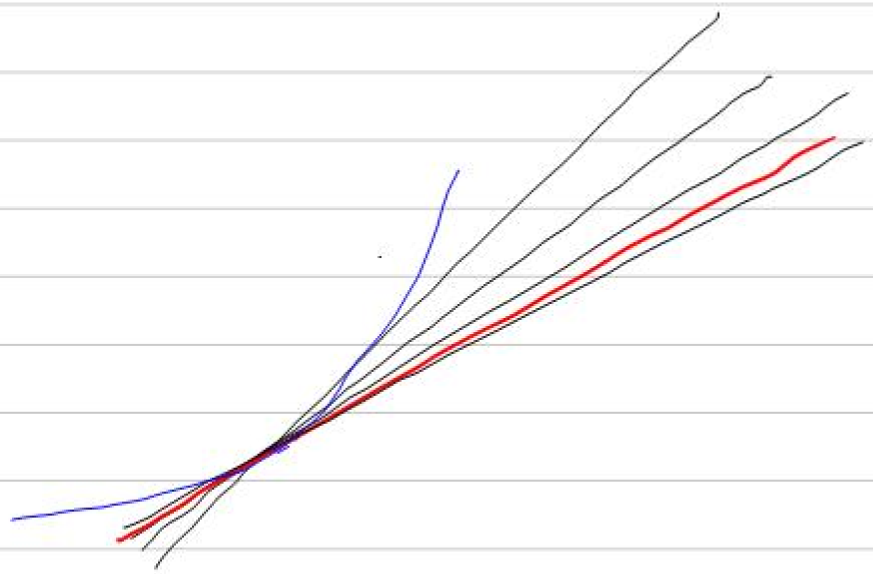
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\left(\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}\right)}{h}$$

$$= \underline{\frac{-1}{a(a+h)}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ kalles den momentane

vekstfarten (endringsrate) til f i x.
Dette kalles også den deriverte til f i x.
Den deriverte til f i x skrives gjerne som $f'(x)$.
Merk at momentan vekstfart ikke alltid eksisterer.
For eksempel $f(x) = |x|$ i $x = 0$.

Sekantene nærmer seg en linje når $h \to 0$. (hvis momentan vekstfart eksisterer).
Denne linjen kalles tangentlinjen til f i $(x, f(x))$.



Momentan Vekstfart for funksjonene
$x^2, \sqrt{x}, \frac{1}{x}$:

x^2 : $\lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

$\sqrt{x}$: $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $x > 0$

$\frac{1}{x}$: $\lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$ $x \neq 0$

Vi har her brukt de gjennomsnittlig vekstfartene til funksjonene som vi regnet ut på side 2.

Noen enklere eksempler:
$f(x) = 5$ (for alle x)

Vekstfarten til f i intervallet $[x, x+h]$
er : $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{5-5}{h} = 0$

momentan vekstfart er $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.

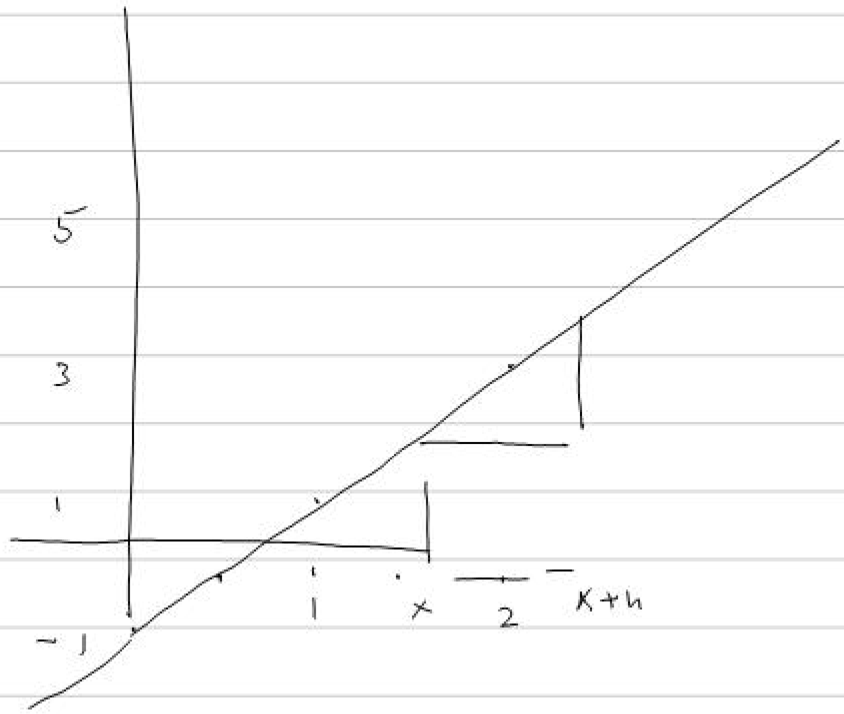
Hvis $f(x)$ er en konstant funksjon ($f(x) = c$ for en konstant c) så er den deriverte til $f(x)$ like 0 for alle x.

$f(x) = 2x - 1$

Gjennomsnittlig vekstfart i intervallen $[x, x+h]$

er $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2(x+h) - 1 - (2x-1)}{h}$

$= \dfrac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2.$ (uavhengig av h)



Derivert til $f(x) = 2x - 1$ i x

er 2.

Litt repitisjon om funksjoner.

En funksjon fra en intervall $[a,b]$ til reelle tall er en regel som til hvert tall x i intervallet $[a,b]$ tilordner et reelt tall. Vi skriver en funksjon f fra $[a,b]$ til $\mathbb{R}$ (reelle tall) gjerne som

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Vi kan beskrive en funksjon ved å spesifisere $f(x)$ for hver x i $[a,b]$

For eksempel vil funksjonen som tar et tall, kvadrerer det og så legger til 2 være gitt ved $f(x) = x^2 + 2$, $x \in [a,b]$

Variabelen x er her ikke viktig. Vi kan like godt kalle den noe annet. Funksjon f ovenfor kan like gjerne beskrives ved $f(w) = w^2 + 2$, $w \in [a,b]$.

Vi finner funksjonsverdier ved å sette inn verdier for variabelen. For eksempel

$f(1) = 1^2 + 2 = 3$ $\qquad$ $f(3) = 3^2 + 2 = 9+2 = 11$.

Vi kan også sette inn variabler i et funksjonsuttrykk

$$f(2k) = (2k)^2 + 2 = 4k^2 + 2$$

setter inn andre funksjonsuttrykk i f

$$f(\sin(v)) = (\sin(v))^2 + 2 = \sin^2(v) + 2.$$

Vi kan se på endringen i funksjonsverdien vi får ved å endre variabelen x med avstanden h.

Vi ser på verdien til f i $(x+h)$.
Vi setter da inn $(x+h)$ istedet for x i funksjonsuttrykket. For eksempel for $f(x) = x^2 + 2$ gir dette $f(x+h) = (x+h)^2 + 2$.
Det er kanskje litt forvirrende at x erstattes av $x+h$, det er fordi vi bruker x til to ulike ting her.
Hadde vi spesifisert funksjonen ved $f(w) = w^2 + 1$ hadde det kanskje vært mindre forvirrende.
Vi setter da inn verdiene x og $x+h$ for w i funksjonsuttrykket for å finne $f(x)$ og $f(x+h)$.

Gj. Endringsrate (vekstfart)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ er endring i funksjonsverdi delt på endringen i variabelen.
Dette er igjen en funksjon.