Eksamen i	FO929A Matematikk
	Kontinuasjonseksamen
Dato	4. august 2008
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	4
Vedlegg	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $f(x) = 7x^3 - 3\ln x + \cos x - 2\pi$ gir $f'(x) = \underline{\underline{21x^2 - 3/x - \sin x}}$

b) $f(x) = \frac{4x-1}{(x+3)^2}$ gir

$$f'(x) = \frac{4(x+3)^2 - (4x-1)\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4} = \underline{\underline{\frac{-4x+14}{(x+3)^3}}}$$

c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 1}$ gir

$$f'(x) = \underline{\underline{\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x+1}}}}$$

d) $f(x) = \sin x \cdot \ln x$ gir $f'(x) = \underline{\underline{\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot 1/x}}$

e) $f(x) = \cos^2(x^2+4)$ gir $f'(x) = 2\cos(x^2+4)\cdot(-\sin(x^2+4))\cdot 2x = \underline{\underline{-4x\sin(x^2+4)\cos(x^2+4)}}$

f) Implisitt derivasjon av likningen gir $5y^4y' + y' = 6x^2 + 1$, og dermed

$$y' = \frac{6x^2+1}{5y^4+1}$$

I punktet $(x, y) = (1, 0)$ får vi dermed stigningstall $a = y'(1, 0) = 7$. Vi bruker ettpunktsformelen, og finner likningen til tangenten:

$$y - 0 = 7(x-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = 7x - 7}}$$

Oppgave 2

a) $\int (8x - 12x^2 + 4e^x)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{4x^2 - 4x^3 + 4e^x + \mathcal{C}}}$

b) $\int (2\sin(2x) + 3\cos(\pi - x))\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-\cos(2x) - 3\sin(\pi - x) + \mathcal{C}}}$

c) Vi bruker polynomidivisjon, og finner at

$$\frac{x-1}{x+4} = 1 + \frac{-5}{x+4}$$

Dette gir $\int \frac{x-1}{x+4}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x - 5\ln|x+4| + \mathcal{C}}}$

d) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = x^4$ og $v = \ln x$, som gir $u = x^5/5$ og $v' = 1/x$. Dermed får vi

$$\int x^4 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \int \frac{1}{5}x^4\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{25}x^5 + \mathcal{C}}}$$

e) Vi bruker substitusjonen $u = x^2 - 2x + 4$, som gir $\mathrm{d}u = (2x-2)\mathrm{d}x$ og dermed

$$\int \frac{x-1}{x^2 - 2x + 4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 4) + \mathcal{C}}}$$

f) Vi separerer differensiallikningen og får

$$3\frac{y^3 - y^2}{y-1}y' = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 3y^2y' = x^{-2}$$

Vi integrerer og får generell løsning

$$y^3 = -\frac{1}{x} + \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \sqrt[3]{\mathcal{C} - \frac{1}{x}}}}$$

Oppgave 3

a) Nullpunktene er gitt ved $f(x) = \sin^2 x \cos x = 0$, det vil si $\sin x = 0$ eller $\cos x = 0$. Vi får dermed de tre nullpunktene $x = \underline{\underline{0, \pi/2, \pi}}$.

b) Vi deriverer $f(x) = \sin^2 x \cos x$ ved hjelp av produktregelen, og får

$$f'(x) = 2\sin x \cos x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x) = 2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$$

Vi bruker at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, og viser at $f'(x)$ kan skrives som

$$f'(x) = 2\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = \underline{\underline{2\sin x - 3\sin^3 x}}$$

c) Vi faktoriserer $f'(x)$ og får

$$f'(x) = -3\sin x(\sin^2 x - 2/3) = -3\sin x(\sin x - \sqrt{2/3})(\sin x + \sqrt{2/3})$$

De to første ikke-konstante faktorene har nullpunkter henholdsvis $x = 0, \pi$ og $x \approx 0.955, 2.186$, mens den tredje faktoren ikke har nullpunkter i $[0, \pi]$. Vi bruker dette til å sette opp fortegnsskjema for $f'(x)$. Vi ser at $x = 0$ og $x \approx 2.186$ gir lokale bunnpunkter $\underline{\underline{(0, 0), (2.186, -0.385)}}$, og at $x \approx 0.955$ og $x = \pi \approx 3.142$ gir lokale topp-punkter $\underline{\underline{(0.955, 0.385), (3.142, 0)}}$.

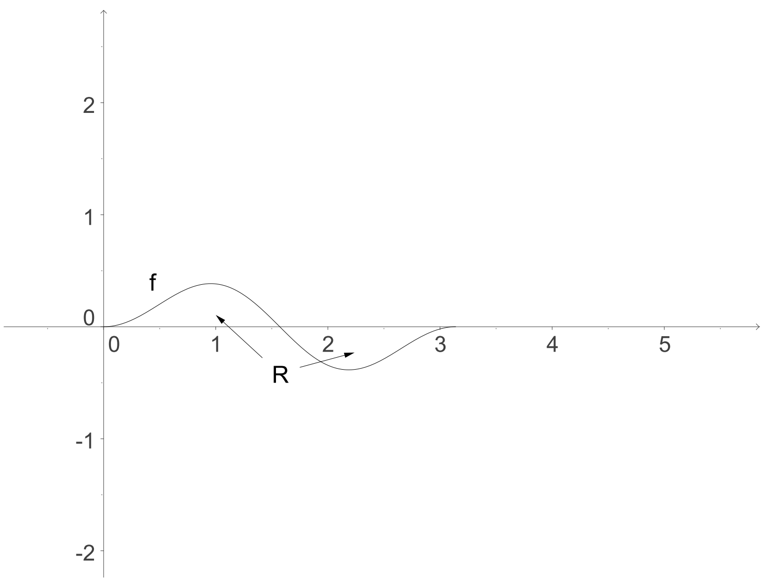
d) Vi deriverer $f'(x) = 2\sin x - 3\sin^3 x$, som gir

$$f''(x) = 2\cos x - 9\sin^2 x \cos x = \underline{\underline{-9\cos x(\sin^2 x - 2/9)}}$$

e) Vi faktoriserer $f''(x)$ og får

$$f'(x) = -9\cos x(\sin^2 x - 2/9) = -9\cos x(\sin x - \sqrt{2}/3)(\sin x + \sqrt{2}/3)$$

De to første ikke-konstante faktorene har nullpunkter henholdsvis $x = \pi/2$ og $x \approx 0.491, 2.651$, mens den tredje faktoren ikke har nullpunkter i $[0, \pi]$. Vi bruker dette til å sette opp fortegnsskjema for $f''(x)$. Vi ser at $x \approx 0.491$, $x = \pi/2 \approx 1.571$ og $x \approx 2.651$ gir vendepunkter $\underline{\underline{(0.491, 0.196), (1.571, 0), (2.651, -0.196)}}$. Se egen figur for grafen til f.



f) Vi ser at R ligger over x-aksen i $[0, \pi/2]$ og under x-aksen i $[\pi/2, \pi]$. Derfor er arealet gitt ved

$$A = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Vi finner det ubestemte integralet $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$ ved substitusjonen $u = \sin x$, som gir $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$ og dermed

$$\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + \mathcal{C} = \frac{1}{3}\sin^3 x + \mathcal{C}$$

Vi setter inn i uttrykket for arealet, og får

$$A = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Oppgave 4

a) Vi finner at

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (1-(-1), \sqrt{3}-0, 1-4) = \underline{\underline{(2, \sqrt{3}, -3)}} & |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{16} = \underline{\underline{4}} \\
\overrightarrow{AC} &= (3-(-1), 0-0, 4-4) = \underline{\underline{(4, 0, 0)}} & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{16} = \underline{\underline{4}} \\
\overrightarrow{BC} &= (3-1, 0-\sqrt{3}, 4-1) = \underline{\underline{(2, -\sqrt{3}, 3)}} & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}
\end{aligned}$$

b) Siden $\triangle ABC$ er likesidet, har vi at $\angle A = \angle B = \angle C = \underline{\underline{60^\circ}}$. Arealet av trekanten blir dermed

$$A = \frac{1}{2}\, 4 \cdot 4 \cdot \sin(60^\circ) = 8\sqrt{3}/2 = \underline{\underline{4\sqrt{3}}}$$

c) Vi ser at vektoren $\overrightarrow{AD}$ er gitt ved

$$\overrightarrow{AD} = (1-(-1), 2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}-0, 3+\frac{2}{3}\sqrt{6}-4) = \underline{\underline{(2, 2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}, -1+\frac{2}{3}\sqrt{6})}}$$

Dens lengde er gitt ved

$$AD^2 = 2^2 + (2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 + (-1+\frac{2}{3}\sqrt{6})^2$$

Vi har at $(2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 = 8 + \frac{4}{3}\sqrt{6} + \frac{1}{3}$ og at $(-1+\frac{2}{3}\sqrt{6})^2 = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{6} + \frac{8}{3}$. Dermed får vi

$$AD^2 = 4 + 8 + \frac{4}{3}\sqrt{6} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3}\sqrt{6} + \frac{8}{3} = 16 \quad \Rightarrow \quad AD = \underline{\underline{4}}$$

d) Volumet av pyramiden er gitt ved

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$$

Vi finner at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, \sqrt{3}, -3) \times (4, 0, 0) = (0, -12, -4\sqrt{3})$ og dermed $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = (0, -12, -4\sqrt{3}) \cdot (2, 2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}, -1+\frac{2}{3}\sqrt{6}) = -24\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 8\sqrt{2} = -32\sqrt{2}$. Dette gir

$$V = \frac{32\sqrt{2}}{6} = \underline{\underline{\frac{16}{3}\sqrt{2}}}$$

e) Siden $AD = BD = CD = 4$, er både grunnflaten og de tre sideflatene likesidede trekanter med side 4. Dermed blir overflaten av pyramiden

$$O = 4 \cdot 4\sqrt{3} = \underline{\underline{16\sqrt{3}}}$$

siden arealet av grunnflaten er $4\sqrt{3}$.