Innlevering	BYPE2000 Matematikk 2000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 2
Innleveringsfrist	Tirsdag 1. april 2014 kl. 12:45
Antall oppgaver:	8+2

1

Bestem den naturlige definisjonsmengden til følgende funksjoner. (Gjør gjerne oppgave 10.1: 1-4, 7, 13 i boken først.)

a)

$$f(x,y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

b)

$$g(x,y) = \frac{xy}{x(x-2)(xy-4)}$$

c)

$$S(x,y,z) = \sqrt{4-(x^2+y^2+z^2)}$$

d)

$$h(x,y) = \frac{x-2y}{\ln(x-2y)}$$

e)

$$f(x,y) = \sqrt{x+2y} - 3\sqrt{-x}$$

f)

$$R(x,y) = 3/\sqrt{9-(x+y)^2}$$

2

Avgjør om grensene eksisterer og finn grenseverdien hvis den eksisterer. (Gjør gjerne oppgave 10.2: 1-4, 6 i boken først.)

a)

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x+y}{x^2-y}$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{|x+y|}{|x-1|+|y+1|}$$

c)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+yz^2}{x^2+y^2+z^2}$$

d)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^3e^{-x^2-z}}{x^2+y^2+z^2}$$

(Det går fint å løse c) og d) uten bruk av sfæriske koordinater.)

3

Finn tangentplanet, hvis det eksisterer, til følgende funksjoner i det oppgitte punktet. Tegn gjerne grafen til funksjonene. (Det er naturlig å gjøre ukesoppgaven til seksjonene 10.3 og 10.4 først.)

a) Finn tangentplanet til

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

i punktet $(-2,1)$

b) Finn tangentplanet til

$$x\sin(xy) - 1$$

i punket $(\pi, 2)$

c) Finn tangentplanet til

$$\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

i punktet $(0,0)$

d) Finn tangentplanet til

$$\ln|xy^2 - x^2|$$

i punktet $(3,2)$

4

Gjør oppgave 10.4.11 først. Se også notatene fra torsdag 27.02.

a) Finn den relative feilen (til første orden) for volumet til en boks hvor hver av sidene er målt med ein relativ nøyaktighet på henholdsvis 2%, 4% og 5%.

b) Sentripetalkraften som virker på et legeme med masse m som svinger i en sirkulær bane med radius r (avstanden fra aksen til massesenteret) og fart v er $F = mv^2/r$. Anta at kraften måles med en relativ nøyaktighet på 2%, radius med en relativ nøyaktighet på 1%, og massen med en relativ nøyaktighet på 0.5%. Finn den relative feilen (til første orden) til farten v regnet ut fra $F = mv^2/r$. Forklar hvorfor den relative feilen er uavhengig av verdiene til F, m og r.

5

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.5 først.)

Høydefunksjonen i et terreng rundt punktet P med koordinater $(20m, 49m, 100m)$ er modelert av følgende funksjon

$$z = f(x, y) = 1m^{-1/2}x\sqrt{y} - \sqrt{5xy} + 30m$$

Enhetene er her meter m.

a) Finn gradientvektoren til f i punktet P.

b) I hvilke retning er stigningen brattest nedover (i følge modellen)? Angi retningen med en retningsvektor. Hva er stigningstallet i denne retningen?

6

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.6 først.)

a) Finn normalvektoren til flaten $z = x^3y - \ln|xy|$ i punktet $P = (1, 1, 1)$. Finn en likning for tangentplanet gjennom punktet P.

b) Sjekk at punktet $P = (1, 1, 1)$ ligger på nivåflaten $F(x, y, z) = -1$ hvor

$$F(x, y, z) = z^3 - zx^2 + x^3y^2 - 2y^3z$$

Finn normalvektoren til nivåflaten i punktet P.

c) Snittet av flatene i a) og b) er en kurve. Punktet P ligger på kurven. Finn (en parametrisering av) tangentlinjen til kurven i punktet P. Hva er stigningstallet til denne linjen (i forhold til xy-planet og i retningen hvor x er økende)?

7

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.7 først.)

Gitt funksjonen

$$g(x, y) = 2x^3 + 6x^2 - 18y^2 + y^4$$

a) Bestem alle partiell deriverte av første og andre orden.

b) Bestem de kritiske punktene til funksjonen og avgjør om de er lokale maksimum eller minimumspunkt eller ingen av delene.

8

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.8 først.)

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = xy^2 - x^2y + x$$

avgrenset til kvadratet gitt ved $0 \leq x, y \leq 2$.

a) Finn alle partiell deriverte av grad 1 og 2, samt diskriminanten.

b) Finn de kritiske punktene til f i det indre av kvadratet. Hva slags ekstremalpunkter er dette?

c) Bestem alle de lokale og de globale minimums og maksimumsverdiene til f (avgrenset til kvadratet).

Tegn gjerne grafen til f.

De to siste oppgavene er frivillige.

9

(Denne oppgaven er tilsvarende 10.3.5.) Gitt funksjonen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Regn ut de første ordens partiell deriverte til $f(x, y)$ for alle punkt. Er de partielt deriverte kontinuerlige funksjoner rundt origo?

b) Har funksjonen et tangentplan (lineær tilnærming i origo)? Hvis ikke, forklar hvorfor Resultatet 10.4.3. i boka ikke er gyldig.

Det er vert å merke seg at funksjonen er symmetrisk i de to variablene

$$f(x, y) = f(x, y).$$

Det kan spare dere for en del arbeid. Tegn gjerne grafen til funksjonen.

10

Her er en funksjon som har egenskapen at f_{xy} er forskjellig fra f_{yx} i origo.

Vi definerer følgende funksjon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Regn ut første ordens partiell deriverte for alle punkt. Er de partiell deriverte kontinuerlige i alle punkt?

b) Regn ut de andre ordens partiell deriverte i origo.

Det er vert å merke seg at funksjonen er antisymmetrisk i de to variablene

$$f(x, y) = -f(y, x).$$

Dette kan spare dere for en del arbeid med utregeningen. Tegn gjerne grafen til funksjonen.