Innlevering	BYPE2000 Matematikk 2000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist	Tirsdag 11. februar 2013 kl. 10:30
Antall oppgaver:	9

1

Avgjør om følgende rekker konvergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

a)

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^{2n}/3^n$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+3n}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$$

(Når konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$? Finn en formel for summen til rekken.)

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+2)}$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{n}$$

f)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2n}{n^3-1} - \frac{n^2-1}{n^3+3n^2+3n}$$

Hint: Kan denne tenkes på som en teleskoprekke?

2

Finn den tiende deriverte til følgende funksjoner i $x = 0$. (Det kan være nyttig å benytte Taylor rekker, og produkt av Taylor rekker.)

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = x^4/1 + x$

c) $f(x) = x^4/(1 + x)$

d) $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

3

Bestem om følgende rekker konvergerer absolutt, konvergerer eller divergerer. Vis hvordan du avgjør konvergensspørsmålet. Finn også summen av de 10 000 første leddene (angi svaret med minst 4 gyldige siffer).

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^{(n/10)}}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-1/n} - 1)$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n^2)}{\sqrt{n}}$$

d)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln(n)))^2}$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{n^6 + 7n^4 - 13n}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^9}$$

4

Bestem Taylor rekken om $x = 0$ til følgende funksjoner (bruk summetegn notasjon)

$$a)\ f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \qquad b)\ \int_0^x t^2 e^{-2t^2} \mathrm{d}t$$

5

Vi skal nå finne en tilnærming til $\sqrt{10}$ ved bare å bruke “de fire regnearter”.

a) Tilnærming av $\sqrt{10}$ basert på Taylor rekkeutvikling. Du kan for eksempel benytte at

$$\sqrt{10} = 10/\sqrt{10} = 10/(3\sqrt{1 + 1/9}).$$

Finn de 6 første delsummene når du benytter Tayler utviklingen til $1/\sqrt{1+x}$.

b) Vi beskriver her en rekursiv metode for å finne kvadratrøtter. Start med en gjetning a_0 (for eksempel 3 for $\sqrt{10}$) og regn ut noen ledd i en tallfølge hvor ledd a_{n+1} er bestemt av ledd a_n som følger

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a}{2a_n}.$$

Finn de første 6 leddene i tallfølgen når $a = 10$ og du starter med $a_0 = 3$.

c) Hvilke metode ser ut til å funger best for å finne kvadratrøtter?

6

Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergerer.

a) Forklar hvorfor summen ligger mellom 1 og 2.

b) Forklar hvorfor differansen mellom summen og den N-te delsumen er mellom$1/N$ og $1/(N+1)$. Forklar hvorfor differansen mellom summen og den N-te delsumm pluss $1/(N+1)$ er mellom 0 og $1/(N^2+N)$.

c) Det viser seg at sumen til rekken er lik $\pi^2/6$. Bruk et regneprogram til å finne summen av de 100 000 første leddene. Hvor stor er differansen mellom svaret du får og

$$\pi^2/6 = 1.6449340668482\ldots?$$

Du kan oppgi differansen med 6 gyldige siffer. Hvordan samsvarer dette med resultatet i *b*)?

Hint til a) og b): Sammenlign gjerne med teleskoprekken med n-te ledd $1/(n^2+n)$ eller sammenlign med et integral.

7

Benytt dobling av vinkel identiteten for sinus

$$\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

til å vise at følgende identitet er gyldig

$$\sum_{k+l=n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)! \cdot (2l)!} = 2^{2n}$$

hvor summen er over alle $k, l \geq 0$ slik at summen deres er lik n. Klarer dere å vise dette uten å benytte sinus og cosinus? Sjekk gjerne manuelt for noen små n.

8

a) Hvor mange ledd må vi ta med i Taylor utvikling av $\cos(x)$, om $x = 0$, hvor x settes lik $1/2$ for at avviket fra $\cos(1/2)$ skal være mindre enn 10^{-20} . Benytt gjerne hjelpemiddel og prøv dere frem.

b) Taylor utviklingen til cos blir inneffektiv hvis variablen er stor. Forklar hvordan utregningen av cos og sin av en vilkårlig vinkel kan reduseres, ved hjelp av diverse trigonometriske identiteter, til cos eller sin av en vinkel mellom 0 og $\pi/4$.

   Anta dere skal lage kalkulator som regner ut cos og sin for vilkårlige vinkler. Hvordan vil dere implementere den (basert på betraktningene ovenfor)?

c) (En utfordring for spesielt intereserte) Finn $\cos(1/2)$ med minst 20 desimalers nøyaktighet.

9

Her er en oppgave for de som ønsker å forstå restleddet til Taylor polynomene.

Anta at $f(x)$ er glatt (uendelig mange ganger deriverbar).

a) La a være en gitt verdi. Benytt skjæringssetningen og ekstremalverdisettningen til å konkludere med at det finnes tall m og M slik at $g^{(N)}(x)$ ligger mellom m og M for alle x mellom 0 og a, og videre at alle verdier mellom m og M er lik $g^{(N)}(c)$ hvor c er et tall mellom 0 og a (eller lik en av dem).

b) Vis ved N gjentatte integralestimater at en funksjon g slik at $g^{(n)}(0) = 0$ for $n < N$ har egenskapen at

$$mx^{N+1}/(N+1)! \leq g(x) \leq Mx^{N+1}/(N+1)!$$

   for x mellom 0 og a, når $a > 0$ eller N er et partall og

$$Mx^{N+1}/(N+1)! \leq g(x) \leq mx^{N+1}/(N+1)!$$

   for x mellom 0 og a, når $a < 0$ og N er et oddetall.

c) Sjekk at restleddet $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ har egenskapen i b) og benytt resultatet sammen med skjæringssetningen til å konkludere med at det for hver x finnes en c mellom 0 og x slik at restleddet $R_n(x)$ er lik $f^{(N+1)}(c)x^{n+1}/(n+1)!$.