Anta A er en symmetrisk matrise.

(dvs. $A^T = A$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$ alle i og j)

Resultat Anta $\vec{V}_1$ og $\vec{V}_2$ er to egenvektorer med forskjellige egenverdier, da er $\vec{V}_1$ og $\vec{V}_2$ ortogonale (dvs. $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$)

Vi viser dette.

Anta $\vec{V}_1$ og $\vec{V}_2$ er søylevektorer

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1^T \cdot V_2 \qquad \left([\ \vec{V}_1^T\ ] \begin{bmatrix} \vec{V}_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{V}_1^T \cdot (A \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1^T (\lambda_2 \vec{V}_2) = \lambda_2 \vec{V}_1^T \cdot \vec{V}_2$$
$$= \lambda_2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$$

Dette er også lik

$$\left((M \cdot N)^T = N^T \cdot M^T \right)$$

$$(\vec{V}_1^T \cdot A) \cdot \vec{V}_2 =$$

$$(A^T \vec{V}_1)^T \cdot \vec{V}_2 =$$

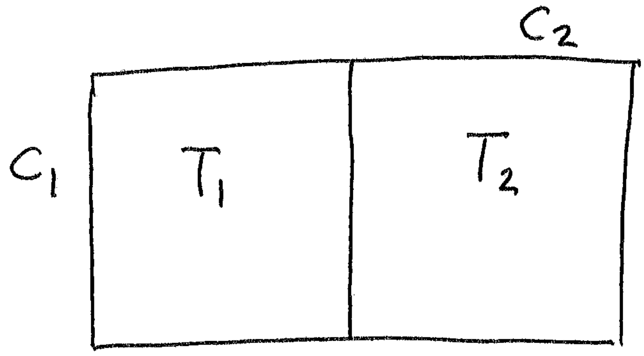
$$(A \vec{V}_1)^T \cdot \vec{V}_2 = \qquad (\text{siden } A^T = A)$$

$$(\lambda_1 \cdot \vec{V}_1)^T \cdot \vec{V}_2 =$$

$$\lambda_1 \vec{V}_1^T \cdot \vec{V}_2 = \lambda_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$$

Så $\lambda_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \lambda_2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$

så $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ må være lik 0 hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$.



T konstant.

Varmestrømmen mellom rom 1 og 2 er c.

Varmekapasitet K_1 K_2
(enhet J/°C (eller Kelvin isteden for °C))
(enheten til varmestrøms koeff. c er W/°C = J/s·°C)

$$K_1 \cdot \frac{dT_1}{dt} = c\,(T_2 - T_1) + c_1(T - T_1)$$

$$K_2 \frac{dT_2}{dt} = c\,(T_1 - T_2) + c_2\,(T - T_2)$$

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{c+c_1}{K_1}\right), & \frac{c}{K_1} & \frac{c_1}{K_1} \\ \frac{c}{K_2} & -\frac{(c+c_2)}{K_2} & \frac{c_2}{K_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T \end{bmatrix}$$

Alternativt kan vi benytte variablene

$T_1 - T$ og $T_2 - T$

$$\frac{d(T_1 - T)}{dt} = \frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{K_1}\left(c\left((T_2 - T) - (T_1 - T) \right) + \overbrace{c_1 (T - T_1)}^{-c_1(T_1 - T)} \right)$$

$$\frac{d(T_2 - T)}{dt} = \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{K_2}\left(c\left((T_1 - T) - (T_2 - T) \right) + \overbrace{c_2 (T - T_2)}^{-c_2(T_2 - T)} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} T_1 - T \\ T_2 - T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(c + c_1)}{K_1} & \frac{c}{K_1} \\ \frac{c}{K_2} & -\frac{(c + c_2)}{K_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 - T \\ T_2 - T \end{bmatrix}$$

Potensrekker av kvadratiske diagonale matriser

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \text{eks.} \quad \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$1 + D + D^2 + D^3 + \cdots + D^n$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\lambda_1+\cdots+\lambda_1^n & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2+\cdots+\lambda_2^n \end{bmatrix}$$

Hvis λ_1^n og λ_2^n går mot 0 når n går mot vendelig, da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} D^n = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda_2} \end{bmatrix}$$

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

siden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x$$

La M være matrisen $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

M er symmetrisk så den kan diagonaliseres.

Den karakteristiske likningen er

$$\det(M - \lambda \cdot 1) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 2$

Egenvektor til $\lambda_1 = -1$: $\begin{bmatrix} 1/2 - (-1) & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 - (-1) \end{bmatrix} \vec{V}_1 = \vec{0}$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \vec{V}_1 = \vec{0}$$

så $\vec{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$|\vec{V}_1| = 1$

Egenvektor til $\lambda_2 = 2$

$$-\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{V_2} = \vec{0}$$

$$\vec{V_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad |\vec{V_2}| = 1$$

$$M = PDP^{-1}$$

$$P = [\vec{V_1}, \vec{V_2}] \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = P^T$ siden $\vec{V_1}$ og $\vec{V_2}$ er ortonormale

$$M = P\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(P \cdot D^n P^{-1})$$

$$= P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n\right) P^{-1}$$

$$= P \exp(D) P^{-1}$$

$$\exp(M) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ e^2 & -e^2 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{e}+e^2 & \frac{1}{e}-e^2 \\ \frac{1}{e}-e^2 & \frac{1}{e}+e^2 \end{bmatrix}}$$