8 april 2014

Egenverdier og egenvektorer

1

M $n \times n$ -matrise

λ egenverdi til M hvis det finnes en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$

$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$. (ekvivalent til $(M - \lambda 1_n)\vec{v} = \vec{0}$)

$\vec{v}$ kalles en egenvektor til λ.

Det er maksimalt n egenvektorer.

λ er en egenverdi $\Leftrightarrow$ $\det(M - \lambda 1_n) = 0$

karakteristiske likningen.

Vi finner egenvektorer $\vec{v}$ til egenverdi λ ved å løse

$$(M - \lambda 1_n)\vec{v} = \vec{0}.$$

Diagonalisering av M:

gangen med P til høyre

$$M = PDP^{-1} \quad (\Leftrightarrow MP = PD)$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad P = [\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n]$$

$\vec{v}_i$ egenvektor til λ_i:

$$MP = M[\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n] = [M\vec{v}_1, M\vec{v}_2, \dots, M\vec{v}_n]$$

$$PD = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\vec{v}_1, \lambda_2\vec{v}_2, \dots \lambda_n\vec{v}_n]$$

Like hvis og bare hvis $\lambda_i\vec{v}_i = M\vec{v}_i \quad i = 1, \dots, n$

$$M^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})$$

$$= P \cdot \underbrace{D \cdot D \cdot D \cdots D}_{m} P^{-1} = PD^mP^{-1}$$

$$D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

En diagonalisering av en matrise gjør det enkelt å finne potenser av matrisen

② Stort eksempel

Fibonacci tall

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3$

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

$F_5 = 5 \quad F_6 = 8 \quad F_7 = 13 \quad F_8 = 21$

$F_9 = 34 \quad F_{10} = 55, \ldots$

La $\vec{V}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$ $\quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{V}_{n+1} = F\vec{V}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$

$\vec{V}_0 = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\vec{V}_n = F^n \vec{V}_0 \quad \left(F^{n-1}(F\vec{V}_0) = F^{n-1} V_1 \text{ etc} \right)$

Hva er F^n?

Vi diagonaliserer F (det er mulig siden F er symmetrisk)

Den karakteristiske likningen til F:

$\det(F - \lambda 1_2) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1^2$

$= \underline{\lambda^2 - \lambda - 1 = 0}$

Egenverdiene er $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$ "det gylne snitt".

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{-1}{\varphi} \quad (1-\varphi)$

Merk $\varphi^2 = 1+\varphi$ så $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$ (delt med φ)

3 $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$ $1 - \varphi = \frac{-1}{\varphi}$

$\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$.

$$D = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{bmatrix}$$

Egenvektor til φ: $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \vec{V} = 0$

$$\begin{bmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & 1-\varphi \end{bmatrix} \vec{V}$$

$$\begin{bmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\varphi} \end{bmatrix} \vec{V} = 0$$

$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$ (normalisert)

Egenvektor til $\frac{-1}{\varphi}$: $\begin{bmatrix} \frac{1}{\varphi} & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{\varphi} \end{bmatrix} \vec{V} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varphi} & 1 \\ 1 & \varphi \end{bmatrix} \vec{V} = 0$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} \varphi \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$$

$P = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & -1 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = P^T = P$

$$F = PDP^{-1} = PDP$$

$$F^n = PD^nP$$

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = V_n = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \cdot \frac{1}{1+\varphi^2}$$

4

$$\bar{V}_n = \frac{1}{1+\varphi^2} \begin{bmatrix} \varphi^n & \varphi\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n \\ \varphi^{n+1} & -\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi \\ -1 \end{bmatrix}$$

så $\quad F_n = \frac{1}{1+\varphi^2}\left(\varphi^{n+1} - \varphi\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right)$

$$= \underbrace{\frac{\varphi}{1+\varphi^2}}_{\frac{1}{\frac{1}{\varphi}+\varphi}} \left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right)$$

(er lik $\sqrt{5}$)

$$\underline{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

sjekker $\quad n=0 \quad F_n = 0$

$n=1 \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$$

$n=2 \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4}\left(2\cdot\sqrt{5} - (-2\sqrt{5})\right) = 1$$

etc.

3.3 (Cramers regel.)

(5) $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ $n \times n$ matrise

Kofaktor (i,j)

$$(-1)^{i+j} C_{ij} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & & - & - & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

fjerner rad i og kolonne j.

Kofaktormatrisen er C som har element (i,j) lik C_{ij}.

Kofaktor ekspansjon (rekursiv def. av determinanten)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{c}_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = 0 \qquad \vec{a}_i \cdot \vec{c}_k = 0 \quad k \neq i.$$

(det. til en matrise med to like rader)

$$C = [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n]$$

$$C^T \cdot A = \begin{bmatrix} \vec{c}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{c}_n^{\,T} \end{bmatrix} [\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n]$$

element (i,k) er $\vec{c}_i^{\,T} \cdot \vec{a}_k = \begin{cases} \det A & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

$$C^T \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

(6)

$$\operatorname{adj} A = C^T$$

$$\frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A) \cdot A = I_n$$

så $$\underline{\underline{A^{-1} = \operatorname{adj} A \cdot \frac{1}{\det A}}}$$

Eks
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = ad - bc$$

$$C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Adj} A = C^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

diagonalelementene byttes plass. - elementene vekk fra diagonalen skifter fortegn