4.02.2014

1. Konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sqrt{n}}{n^3}$?

$$\frac{n\sqrt{n}}{n^3} = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{1/2}}{n^2} = n^{1/2-2} = n^{-3/2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Rekken er lik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Dette er en p-rekke med $p = 3/2 > 1$, så rekken $\underline{\text{konvergerer}}$

—

Konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$?

$$\frac{2^n + 3^n}{4^n} = \frac{2^n}{4^n} + \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-3/4} = \frac{1}{1/4} = 4$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= 2 + 4 = \underline{6}\end{aligned}$$

Rekken konvergerer og summen er $\underline{6}$.

—

Konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^7}$? Nei

Divergerer siden 2^n vokser mye raskere enn n^7.

—

e^x vokser mye raskere enn ethvert polynom $p(x)$.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (grense av polynomer av vilkårlig høy grad)

(2) Konvergerer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2 + n\cos(n)}$?

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)}{n^2 + n\cos(n)} \leq \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$$ konvergerer

Ved sammlikningstesten vil $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2 + n\cos(n)}$ også konvergere (med sum mellom 0 og 1).

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$2 \leq n^2 - n \leq n^2 + n \cdot \cos n \leq n^2 + n$$

siden $n \geq 2$

$$0 < \frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + n \cdot \cos n} \leq \frac{1}{n^2 - n}$$

Konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$?

Forholdstesten : $\sum a_n$ $a_n > 0$

Anta $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksistere og er lik L.

Hvis $L < 1$ da konvergerer rekken

Hvis $L > 1$ da divergerer rekken.

Ingen konklusjon fra testen hvis $L = 1$.

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}^{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \to \infty \quad \text{når } n \to \infty$$

Rekken divergerer

(3) Forholdstesten: $a_n = \frac{n^n}{n!}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = n+1. \\ \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{array} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot(n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underline{\underline{e}}$$

$e > 1$ rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergerer

(4) 7.8 Absolutt og betinga konvergens

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer <u>absolutt</u> hvis

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer, da vil også $\sum a_n$ konvergere

Absolutt konvergens $\Rightarrow$ konvergens.

Eks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \cdots$ konvergerer

men $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer

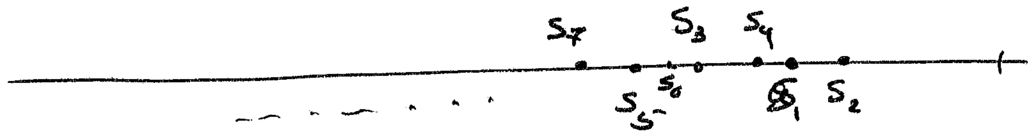
En rekke som konvergerer, men som ikke konvergerer absolutt sier vi konvergerer <u>betinga</u>

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ er betinga konvergent.

—

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2+(-1)^{n+1}}{n}\right) = -\frac{3}{1} + \frac{1}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{6} - + \cdots$$

Er en alternerende rekke og leddene går mot 0 når n går mot vendelig.



Rekken divergerer (til $-\infty$).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{n} - \frac{1}{n}$ må divergere siden

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{n}$ konv. og $\sum \frac{-1}{n}$ div.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$ Konvergerer rekken? Betinget, absolutt?

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n^{1/3}}{n^{1/2}} = \frac{1}{n^{1/2-1/3}} = \frac{1}{n^{1/6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/6}} = \sum a_n$$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6}}$ p-rekke med $p = 1/6 \leq 1$

Så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6}}$ divergerer.

($\sum (-1)^n b_n$ konverger hvis: $b_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, b_n avtagende)

$\sum (-1)^n \frac{1}{n^{1/6}}$ konvergerer (ved resultatet ovenfor)

Så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$ er betinga konvergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ } \cdot \frac{n}{n^2+1}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

$\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n^2} \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, så divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ er en alternerende rekke
hvor leddene går mot 0 når n går mot ∞
og leddene er avtagende (i absoluttverdi)
så rekken konvergerer.
Dette er en betinga konvergent rekke.

$\sum (-1)^n \frac{p(n)}{q(n)}$ når konvergere denne
$p \cdot q$ polensuttrykk i n.

konvergerer når grad q > grad p

konvergerer absolutt når grad q > (grad p) + 1.

Avgjør konvergens til rekka $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \cdot \ln(n)}$

Vi avgjør om rekken konv. absolutt:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \cdot \ln(n)}$

$f(x) = \frac{1}{2x \ln x}$ avtagende (positiv) funksjon

$\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ divergens

Ved integraltesten divergerer rekken

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \ln(n)}$ konvergere siden

$\frac{1}{2n \ln(n)}$ avtagende

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n \ln(n)} = 0$

og rekken er alternerende

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \ln(n)}$ konvergerer betinget