14.01.2013 Øvingstimer

	Tirs.	13:45 – 15:30	PI 246
	Ons.	14:45 – 16:30	PI 248
	Tors.	14:45 – 16:30	PI 243

① Matte 2000

H. Fausk

Rep Tallfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $a_1, a_2, a_3, \dots$

summerer leddene : Rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Følgen av delsummer $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis følgen av delsummer $\{S_n\}$ konvergerer. Summen til rekken er da grensen til delsummene.

Vi kan skalere og addere rekker

$$k\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og har sum S

og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ —— " —— T

da konvergerer $k\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ og har sum kS,

og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer og har sum $S+T$.

(Tilsvarende for differanser $a - b = a + (-1)b$.)

Eks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ Hva er summen (hvis den konv.)?

$$\left(2^{n+1}/3^{n-1} = 2^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} \quad 2^{n+1} = 2^{2+n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} \quad 2^2 \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = 2^2 \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} \right)$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 3 \cdot 1 - 4\frac{1}{1 - 2/3} = 3 - 12 = \underline{-9}$$

(2)

Mer repetisjon $\frac{1}{n(n+1)} \overset{\text{delbrøksoppspalting}}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$p_n - p_{n+1} \qquad p_n = \frac{1}{n}.$

Teleskoprekker $(p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + (p_3 - p_4) + \cdots$

n-te delsum $S_n = p_1 - p_{n+1}$ . .

Siden $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

så er $\lim_{n\to\infty} S_n = p_1$

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}}$$

Geometriske rekker

$$\underset{}{a_0} + \underset{a_1}{a_0 k} + \underset{a_2}{a_0 k^2} + a_0 k^3 + a_0 k^4 + \overset{a_5}{a_0 k^5} + \cdots$$

Eks. Hvilken geometrisk rekke har $a_2 = 2$, $a_5 = \frac{1}{4}$?

$a_2 = a_0 k^2$

$a_5 = a_0 k^5$

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_0 k^5}{a_0 k^2} = \frac{k^5}{k^2} = k^5 \cdot k^{-2} = k^{5-2} = k^3$$

så $k = \sqrt[3]{\frac{a_5}{a_2}} = \sqrt[3]{\frac{1/4}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$$a_0 = a_2 / k^2 = 2/(\tfrac{1}{2})^2 = 2/\tfrac{1}{4} = \frac{2\cdot 4}{\frac{1}{4}\cdot 4} = \underline{8}$$

$8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

(3) sammenlign med

$8 - 4 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + - \cdots$

a_2 og a_4 er like men rekkene er ulike.

Gitt a_n og a_{n+2m} så er

de bare gitt opp til fortegn.

Hva er summen til $\sum_{n=0}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$?

$$8 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 8 \cdot \frac{1}{1-(\frac{1}{2})} = 8 \cdot \frac{1}{1/2}$$

$$= 8 \cdot 2 = \underline{\underline{16}}$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{N+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ N+1 & x = 1 \end{cases}$$

(4)

7.3 Taylor rekker

La $f(x)$ være en glatt funksjon på en intervall.
La a være et punkt i intervallet
(Glatt vil si at alle deriverte til f eksisterer)
n-te derivert til $f(x)$ skrives $f^{(n)}(x)$

$$\left(f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} f \qquad f^{(2)} = f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} \right)$$

N-te Taylor $\overbrace{}^{\text{polynom}}$ til $f(x)$ om $x=a$ er polynomet $P_N(x)$ av grad N (eller mindre) slik at $f^{(n)}(a) = P_N^{(n)}(x)$ for $n \leq N$.

$$P_0(x) = f(a)$$

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}$$

$$P_3(x) = f(a) + f'(a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$((x-a)^3|_{x=a} = 0$, $((x-a)^3)' = 3(x-a)^2$ som er 0 når $x=a$

$((x-a)^3)'' = (3(x-a)^2)' = 3 \cdot 2(x-a)$ — " —

$((x-a)^3)^{(3)} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ når $x=a$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \qquad (n \text{ fakultet})$$

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 24 \qquad 5! = 120 \qquad 6! = 720$

$7! = (720) \cdot 7 = 7 \cdot 100 \cdot 7 + 20 \cdot 7 = 4900 + 140 = \underline{5040}$

etc

(5) $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ N-te Taylor polynom

$f(x) - P_N(x) = R_N(x)$ restledd

$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$ for en c mellom a og x (avhenger av a, x, n)

Taylor rekken til $f(x)$ om $x=a$ er

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Delsummene er Taylor polynomene til $f(x)$.

Taylor rekken konvergerer til $f(x)$ hvis $\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$.

Taylor rekke om 0 kalles (Maclaurinrekke)

Eksempel e^x $a=0$

$(e^x)^{(n)}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = e^0 = 1$.

Taylor rekken er

$1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + \cdots$

$R_N(x) = \frac{e^c}{(N+1)!}x^{N+1} = e^c \frac{x \cdot x \cdot x \cdots\cdots x \cdot x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots N\ (N+1)}$

c mellom 0 og x Faktorene $\frac{x}{N+1}$ er (absoluttverdi) mindre enn $\frac{1}{2}$ når $N+1 > 2x$.

En økning med 1 i N gir minst en halvering for $N > 2x$.

(6)

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{alle } x.$$

$x=0$: $e^x = 1$

$x=1$ $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots$

$x=-1$ $\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\cdots$

$x=2$ $e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{1}{1-x} = f(x)$$

$$f'(x) = \left((1-x)^{-1}\right)' = (-1)(-1)\cdot(1-x)^{-2}$$

$$f^{(2)}(x) = \left((1-x)^{-2}\right)' = 2(1-x)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}.$$

$a=0$ Taylor rekken til $\frac{1}{1-x}$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\cdot 1}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ den geometrisk rekke!

Denne konvergerer når $|x|<1$.

⑦

$\cos x = f(x)$ — setter $x=0$

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x = -f(x)$

$f^{(3)}(x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = f(x)$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = -1$

$f^{(3)}(0) = 0$

$f^{4}(0) = 1$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$$

konvergerer for alle x.

$i^2 = -1$

$$e^{i \cdot z} = \cos(z) + i\sin(z)$$ Eulers formel

siden

$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$