1. Tallfølger $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, \overset{n\text{-te ledd}}{a_n}, \ldots$

endelig tallfølge $\quad a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots$

Eks $\quad a_n$ = primtall nr n $\quad 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$

Tallfølger kan tenkes på som funksjoner fra naturlige tall $(1, 2, 3, \ldots)$ til reelle tall

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(n) = f_n$ ledd n.

En tallfølge $\{a_n\}$ er konvergent og har grense a hvis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eksisterer og er lik a.

Hvis ikke den konvergerer så divergerer den.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ to tallfølger.

Summen er $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

produktet er $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$.

c tall. skalarmultiplikasjon $c\{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$

Grensesetningene

Anta $\{a_n\}$ konvergerer til L og $\{b_n\}$ konvergerer til M. Da vil

$\{a_n + b_n\}$ konvergere og grensen er $L+M$

$\{a_n \cdot b_n\}$ konvergere og grensen er $L \cdot M$.

$\{a_n / b_n\}_{\text{hvor } b_n \neq 0}$ konvergere og grensen er L/M når $M \neq 0$.

(2) c konstant $\quad c\{a_n\}$ konverge og ha grense $c \cdot L$

Eks $\quad a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2} = \sqrt{n^2+n} - n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ divergerer

grensesetningene kan <u>ikke</u> benyttes.

Triks. Ganger med den konjugerte (konjugatsetningen)

$$(b-a)(b+a) = b^2 - a^2.$$

$$\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

så $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}$.

$\{a_n\}$ er begrensa hvis det finnes et tall T slik at $|a_n| \leq T$ for alle n.

Monoton $\{$ $\{a_n\}$ <u>voksende</u> hvis $a_n \leq a_{n+1}$ for alle n

<u>avtagende</u> hvis $a_n \geq a_{n+1}$ for alle n.

Resultat $\quad$ Alle monotone begrensa følger konvergerer.

7.2 Rekker

En rekke er en (formell) sum

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ eller $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tilordnet en tallfølge $\{a_i\}_{i=1}^{n}$

Rekker — summer

Eks. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$

$\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}\right)$

$1 + 2 + 3 \,(+ 0 + 0 + \cdots) = 6$

* Rekkefølgen til leddene kan være av betydning.
* Ikke alle rekker har en sum
* Selv om en rekke har en sum så skiller vi mellom rekken og summen.

Eks Rekker

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

$1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$

Følgen av delsummer til rekken

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

har n-te ledd lik $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

En rekke konvergerer og har sum S hvis følgen av delsummer konvergerer og har grense S.

Dvs. summen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nærmer seg S.

④ Ser på eksemplene ovenfor og avgjør konvergens og finner eventuelt summen

* $1-1+1-1+-\cdots$

Følge av delsummer $1, 0, 1, 0, \ldots$ divergerer

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer.

$$\underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}}_{2^n \text{ ledd}} \geq \frac{2^n}{2^{n+1}-1} \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{7}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots$$

$$S_{2^{n+1}-1} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{2}$$

så $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

* $1+2+3$

Følgen av delsummer $1, 3, 6, 6, 6, 6, \ldots$ grensen er 6.

* Geometriske rekker

$1+x+x^2+x^3+\cdots$ n-te leddet er x^{n-1}, $n \geq 1$

(og skaleringer av disse)

<u>Resultat</u> $1+x+x^2+\cdots$ konvergerer hvis $|x|<1$,

og summen er $\frac{1}{1-x}$

Rekken divergerer hvis $|x| \geq 1$.

⑤ Når $x = \frac{1}{2}$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (0.99)^n = \frac{1}{1-0.99} = 100.$$

Bevis

Delsummer $\quad S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$

$$x \cdot S_n = x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$$

$$S_n - xS_n = (1-x)S_n = 1 - x^n$$

$x \neq 1$: $\quad S_n = \frac{1-x^n}{1-x}.$

$x = 1$ $\quad S_n = n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ når $|x| < 1$

divergerer for $|x| \geq 1$.

<u>Teleskoprekker</u> $\quad (p_0 - p_1) + (p_1 \mp p_2) + (p_2 - p_3) + \cdots$

Delsummene er $S_n = p_0 - p_n$

Eks $\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$

(i boka)

$$\left(\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1\cdot(n+1)}{n(n+1)} - \frac{1\cdot n}{n(n+1)} \right)$$

n-te leddet i rekken er $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$p_0 = 1, \quad p_n = \frac{1}{n+1}$

Dette er en teleskoprekke.

n-te delsum er $p_0 - p_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$

Grensen er 1. Så $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots = 1.$