Eksamen 1. des 2009 i Ma 2000 Bygg.

OPPGAVE 1

a) Skriv tallet $\frac{2+7i}{4-2i}$ på normalform og $(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ på eksponensiell (polar) form.

b) Finn tallet $(0.5 + 1.2\,i)^{10}$ og skriv svaret på normal form.

c) Hvor mange løsninger har ligningen $z^6 + 64z^3 = 0$ når du tar med både reelle og komplekse løsninger? Finn alle løsningene av denne likningen.

OPPGAVE 2

a) Vis at $y = x^2$ er en partikulærløsning av differensiallikningen

$$y'' - 2y' + 10y = 10x^2 - 4x + 2\,.$$

Finn den generelle løsningen.

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $(D-1)^2(D+2)y = 0\,.$
Finn **formen** på en partikulærløsning til $(D-1)^2(D+2)y = xe^x + 3e^{-2x} + 5e^{2x}\,.$
(Det er ikke meningen du skal bestemme konstantene i partikulærløsningen).

OPPGAVE 3

En flate F er gitt som grafen til funksjonen $z = f(x,y) = x^2y - x^2 - y^2 - \dfrac{y^4}{2}\,.$

a) Regn ut de partielt deriverte til f av første og andre orden.

b) Finn de kritiske punktene til f (det er tre slike punkter) og angi deres type.

c) Vertikalplanet $y = 2x$ skjærer flaten F i en kurve C. Finn stigningstallet til tangenten til C i punktet $(1, 2, -11)$.

OPPGAVE 4

Temperaturen i et punkt (x, y, z) er gitt ved funksjonen $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

a) La $(a, b, c) = (4, 3, 5)$ og anta at a, b og c er målte verdier med en maksimal målefeil på 0.2 for a og på 0.1 for b og c, dvs. $a = 4.0 \pm 0.2$, $b = 3.0 \pm 0.1$ og $c = 5.0 \pm 0.1$. Finn den usikkerheten dette gir for temperaturen i (a, b, c).

b) Vi befinner oss i punktet $(x, y, z) = (4, 3, 5)$. I hvilken retning må vi bevege oss for å oppleve størst temperaturvekst? Hvor stor er temperaturveksten i denne retningen?

OPPGAVE 5

a) Avgjør om rekkene i (i) og (ii) konvergerer eller divergerer.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{2n}{3+5n}\right) \qquad \text{og} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!}\,.$$

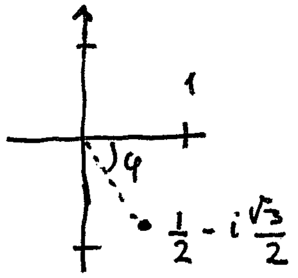
b) Finn konvergensområdet til potensrekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2n}\,.$

c) Finn Maclaurinrekka til $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Hva blir summen av rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{3^n}$?

LØSNINGSFORSLAG

Oppg. 1 a) $\dfrac{2+7i}{4-2i} = \dfrac{(2+7i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{8+4i+28i+14i^2}{4^2-(2i)^2}$

$= \dfrac{8-14+32i}{16+4} = \dfrac{-6+32i}{20} = \underline{\underline{\dfrac{-3+16i}{10}}}$



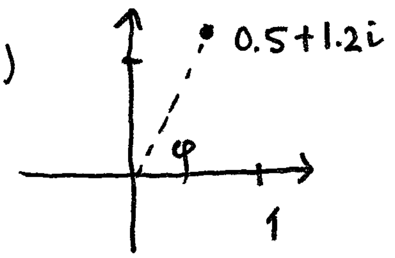
$\left|\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$\varphi = -60^\circ \quad (= -\frac{\pi}{3})$

$\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\Longrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \left(e^{-i\pi/3}\right)^2 = \underline{\underline{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}}$

b)



$|0.5+1.2i| = \sqrt{0.5^2+1.2^2} = 1.3$

$\tan\varphi = \dfrac{1.2}{0.5} = 2.4$

$\varphi = \arctan 2.4 \approx 67.38^\circ$

$\Rightarrow (0.5+i\cdot 1.2)^{10} = (1.3\,e^{i\varphi})^{10} = 1.3^{10}\cdot e^{i\,10\varphi} \approx$

$13.78585\,(\cos 10\varphi + i\sin 10\varphi) \approx \underline{\underline{9.54 - 9.95i}}$

c) Egentlig har ligm. 6 røtter fordi det er en 6.gradslign. Da teller vi både reelle og komplekse løsn. og vi teller med multiplisitet. Da

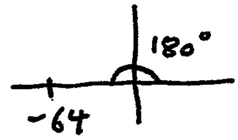
$z^6 + 64z^3 = z^3(z^3+64) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z^3 = 0$ eller $z^3+64 = 0$, så vil vi få 4 forskjellige løsninger, nemlig

$\underline{\underline{z=0}}$ (en rot med multiplisitet 3)

og de 3 løsn. av $z^3 = -64$. De er:

$$z^3 = -64 = 64e^{i(\pi + 2k\pi)}$$



$$z = \sqrt[3]{64}\, e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}}$$

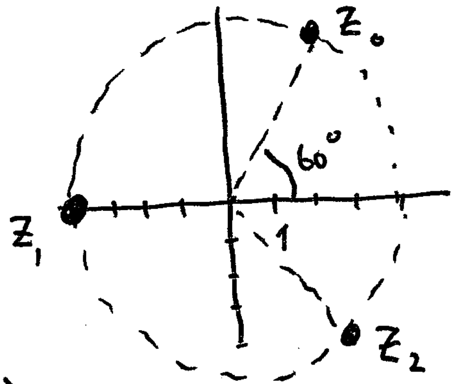
$$z = z_k = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 4e^{i\pi/3} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{2 + i2\sqrt{3}}}$$

$$z_1 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 4e^{i\pi} = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = \underline{\underline{-4}}$$

$$z_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = \underline{\underline{2 - i2\sqrt{3}}}$$



Oppg 2

a) $y = x^2$, $y' = 2x$, $y'' = 2$

Setter inn i VS (venstresiden)

$$\Rightarrow y'' - 2y' + 10y = 2 - 2\cdot 2x + 10x^2 = 2 - 4x + 10x^2$$

dvs. er lik høyresiden. Altså er $y = x^2$ en løsning

Kar. ligm. $r^2 - 2r + 10 = 0$

Røtter $r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 10}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{2 \pm i\cdot 6}{2}$

$= \underline{1 \pm 3i}$

En kompleks løsn.:

$$e^{(1+i3)x} = e^x \cdot e^{i3x} = e^x(\cos 3x + i\sin 3x)$$

Realdel og imaginærdel er løsn. Gen. løsn.

$$y_h = c_1 e^x \cos 3x + c_2 e^x \sin 3x \quad \text{av} \quad y'' - 2y' + 10y = 0$$

Da $y = y_p = x^2$ er en part. løsn, så er

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{e^x(c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x) + x^2}}$$ gen. løsn. av den gitte ligningen

b) $(D-1)^2(D+2)y = 0$

Kar. lign. $(r-1)^2(r+2) = 0$

Røtter $r=1$ (dobbeltrot) , $r=-2$

Løsn. $e^{1\cdot x}$, $x\cdot e^{1\cdot x}$, e^{-2x}

Generell løsn. $\underline{\underline{y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}}}$

Har $(D-1)^2(D+2)y = xe^x + 3e^{-2x} + 5e^{2x}$

Da $(D-1)^2(xe^x) = 0$, $(D+2)(3e^{-2x}) = 0$ etc, så

anvender vi $(D-1)^2(D+2)(D-2)$ på begge sider. Får

$(D-1)^4(D+2)^2(D-2)y = 0$ med gen løsn.

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \underline{c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x} + c_5 e^{-2x} + \underline{c_6 x e^{-2x}} + \underline{c_7 e^{2x}}$$

De med strek under må derfor utgjøre formen på en part. løsn. , dvs.

$$y_p = \underline{\underline{a x^2 e^x + b x^3 e^x + c x e^{-2x} + d e^{2x}}} \quad , \ a,b,c,d \text{ konst}$$

Oppg. 3 $\quad z = x^2 y - x^2 - y^2 - \frac{1}{2} y^4$

a) $z_x = 2xy - 2x = \underline{\underline{2x(y-1)}}$, $z_y = \underline{\underline{x^2 - 2y - 2y^3}}$

$z_{xx} = \underline{\underline{2(y-1)}}$, $z_{yy} = \underline{\underline{-2-6y^2}}$, $z_{xy} = z_{yx} = \underline{\underline{2x}}$

b) Kritiske punkter : $z_x = 0$ og $z_y = 0$, dvs.

$2x\cdot(y-1) = 0 \iff x=0$ eller $y=1$

$x=0$ innsett i $z_y = 0 \implies -2y - 2y^3 = 0 \iff 2y(1+y^2) = 0$

$\iff y = 0$

Får $(x,y) = \underline{\underline{(0,0)}}$

$y=1$ innsatt i $z_y = 0 \Rightarrow x^2-2-2=0 \Leftrightarrow$

$x^2=4 \Leftrightarrow \underline{x=\pm 2}$ Får $(2,1)$ og $(-2,1)$

Kritiske punkter : $(x,y) = \underline{\underline{(0,0)}}$, $\underline{\underline{(2,1)}}$, $\underline{\underline{(-2,1)}}$

$$\Delta = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = 2(y-1)\cdot(-2-6y^2) - 4x^2$$

$(0,0)$ gir $\Delta = 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 0 = 4 > 0$

Da $z_{xx} = 2\cdot(0-1) = -2$, så er $\underline{\underline{(0,0) \text{ et max.punkt}}}$

$(2,1)$ gir $\Delta = 0 - 4\cdot 2^2 = -16 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{(2,1) \text{ et sadelpunkt}}}$

$(-2,1)$ gir $\Delta = -16 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{(-2,1) \text{ er et sadelpunkt}}}$ for f

c) Setter vi $y=2x$ inn i $z=f(x,y)$, får vi

$$f(x,2x) = x^2\cdot 2x - x^2 - (2x)^2 - \frac{(2x)^4}{2} = 2x^3 - x^2 - 4x^2 - 8x^4$$

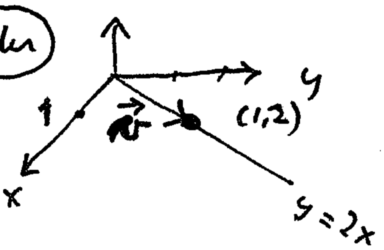
Kaller denne funksjonen $g(x)$, dvs $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x^4$

Skal finne $g'(x)$ når $x=1$. (dette er stign. tallet det spørres etter) hvis vi deler med lengden av $\vec{r}'(x) = [1,2]$

$$g'(x) = 6x^2 - 10x - 32x^3 \Rightarrow g'(1) = \underline{-36} \Rightarrow$$

Stigningen til tangenten er $-\frac{36}{\sqrt{5}}$

eller



La $\vec{v} = [1,2]$ vektoren på fig. Stign. tallet det spørres etter er også lik den retningsderiverte til f i $(1,2)$ i retningen $\vec{v}$. Den er

$$D_{\vec{e}}(f) = \nabla f(1,2)\cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = [2x(y-1), x^2-2y-2y^3]_{(x,y)=(1,2)} \cdot [1,2]/\sqrt{1+4}$$

$$= [2,-19]\cdot \frac{[1,2]}{\sqrt{5}} = \frac{2-38}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{-36}{\sqrt{5}}}}$$

Oppg. 4 $\quad w = f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

I punktet $(4,3,5)$ så er det totale differensialet lik

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \frac{2\cdot 4}{4^2+3^2+5^2}dx + \frac{2\cdot 3}{50}dy + \frac{2\cdot 5}{50}dz$$

Tar vi tallverdien av hvert ledd og lar $dx = 0.2$ og $dy = dz = 0.1$, så finner vi usikkerheten i $d = f(4,3,5)$.

Får $\left|\frac{8}{50}dx\right| + \left|\frac{6}{50}dy\right| + \left|\frac{10}{50}dz\right| = 0.16\cdot 0.2 + 0.12\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.1 = \underline{\underline{0.064}}$

b) Vi får størst temperaturvekst i gradientens retning, dvs. i retningen $\nabla f(4,3,5) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]_{(x,y,z)=(4,3,5)} = \underline{\underline{\left[\frac{4}{25}, \frac{3}{25}, \frac{5}{25}\right]}}$

dvs i retningen $\underline{\underline{[4,3,5]}}$

Temperaturveksten i denne retningen er:

$$\nabla f(4,3,5)\cdot\frac{\nabla f(4,3,5)}{|\nabla f(4,3,5)|} = |\nabla f(4,3,5)| = \sqrt{\frac{4^2+3^2+5^2}{25^2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{5}}}$$

Oppg. 5 a)

i) Vet at $\frac{2n}{3+5n} = \frac{2}{\frac{3}{n}+5} \to \frac{2}{5}$ når $n\to\infty$

$$\Rightarrow \quad a_n = \tan\left(\frac{2n}{3+5n}\right) \longrightarrow \tan\frac{2}{5} \neq 0 \quad \text{når } n\to\infty$$

Rekka divergerer derfor etter divergenstesten.

(ii) $\sum \frac{4^n}{(2n)!}$. Sett $a_n = \frac{4^n}{(2n)!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(2(n+1))!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n} = 4\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{4}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow 0 \quad \text{når } n\to\infty$$

Rekka konvergerer etter forholdstesten

b) $\sum (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n}$. La $u_n = (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n}$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{(x-1)^n} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot |x-1| \to |x-1| \text{ når } n \to \infty$$

Rekka konv. for

$$|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff \underline{0 < x < 2}$$

og den divergerer for $|x-1| > 1$ etter forholdstesten

$x = 2$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}$. Denne konvergerer etter Leibnitz

$x = 0$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Denne rekka ~~konvergerer~~ divergerer fordi p-rekka med $p = 1$ (dvs. den harmoniske rekka) divergerer

$\Rightarrow$ Konvergensområdet er $\underline{\underline{0 < x \leq 2}}$

c) Vet at

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

fordi rekka til høyre er geometrisk.
Deriverer ledd for ledd og får

$$\frac{-1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n}}, \quad |x| < 1$$

Dette er Mac. rekka
fordi det bare er én rekkeutvikling av $\frac{1}{(1-x)^2}$ på formen $\sum a_n x^n$. Bruker $x = \frac{2}{3}$ og får

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 9 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n = \underline{8}$$

ANM. Kunne løst oppgaven ved å bruke den binomiske rekka, dvs. mac. rekka til $(1+x)^p$ med $p = -2$.