Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $y'' + y = t$.

b) Vis at $y = t\cos t$ tilfredsstiller differensiallikningen $y'' + y = -2\sin t$, og bruk dette til å løse initialverdiproblemet (hvor $y = y(t)$) :

$$y'' + y = -2\sin t \ , \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 4 \ .$$

Hvis differensiallikningen modellerer bevegelsen i et svingende system, hva skjer med svingningene når tiden går? Hva kalles dette fenomenet?

Oppgave 2

En flate F er gitt som grafen til funksjonen $z = f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 3y^2 + 1$.

a) Regn ut de partielt deriverte til f av første og andre orden. Hvorfor ligger punktet $(2, 1, 2)$ på flaten?

b) Bestem ligningen for tangentplanet i punktet $(2, 1, 2)$. Dette planet er parallelt med en av de 3 koordinataksene. Hvilken koordinatakse?

c) La $c = f(a, b)$ og la $(a, b) = (2, 2)$. Vi tenker oss at a og b er målte verdier med en maksimal målefeil på 0.02 for a og 0.03 for b, dvs. at $a = 2.00 \pm 0.02$ og $b = 2.00 \pm 0.03$. Finn den usikkerheten dette gir for verdien av c.

d) Finn de kritiske punktene til f og klassifiser dem (dvs. angi deres type).

e) Vertikalplanet $x - y = 0$ skjærer flaten F i en kurve C. Finn stigningstallet til tangenten til C i punktet $(2, 2, 7)$.

Oppgave 3

a) Undersøk om rekkene $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{7^n}$ og $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^{3/2} + 2n^2}$ konvergerer eller divergerer. Finn summen av de rekkene som konvergerer.

b) Gitt potensrekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}$. Da finnes det et største tall R som er slik at denne potensrekka konvergerer for alle $x \in \langle -R, R \rangle$. Hva kalles dette tallet R? Finn R.

Oppgave 4

a) Bruk potensrekka til $\ln(1 + x)$ til å finne Maclaurinrekka til $g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$. For hvilke x konvergerer rekka?

b) Bruk a) i denne oppgaven til å finne $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ og $\lim\limits_{x \to 0} g^{(8)}(x)$.

c) Beregn integralet $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x)}{x}\, dx$ som en sum av ei (uendelig) tallrekke.

Oppgave 5

En funksjon er gitt ved $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, -\frac{\pi}{2} \rangle \\ 0, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ og $f(x + 2\pi) = f(x)$.

a) Bestem Fourierrekka til $f(x)$.

b) Tegn grafen til summen av rekka i intervallet $[-2\pi, 3\pi]$. Bruk Fourierrekka til $f(x)$ til å finne summen av rekka $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.