Eksamen i	BYPE2000 - Matematikk 2000
Dato:	2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	7 (20 deloppgaver)
Antall sider:	4
Vedlegg:	Noen formler
Hjelpemiddel:	Ingen

Alle svarene skal grunngis. Alle deloppgavene teller like mye.

1

Avgjør om følgende rekker konvergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0.8^n$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

2

Avgjør om følgende endelige og uendelige rekker konvergerer absolutt, betinget eller ingen av delene. Du trenger ikke finne summen selv om rekkene konvergerer.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n}}$$

b)

$$\sum_{n=4}^{1000000} \frac{(-1)^n}{n}$$

c)

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

3

a) Bestem Taylor rekkene om $x = 0$ til $f(x) = x^3/(1+x^2)$. Benytt Taylor rekkene til å finne den deriverte $f^{(13)}(0)$.

b) Bestem Taylor rekken om $x = 0$ til

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

c) Gi et eksempel på en divergent alternerende rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

($a_n > 0$ for alle n) hvor a_n går mot null når n går mot uendelig.

4

a) Bestem alle første og andre ordens deriverte til funksjonen

$$z = f(x, y) = -3x^2 + 6xy + 2y^3 - 3$$

med den naturlige definisjonsmengden.

b) Bestem de kritiske punktene til f. Finn alle lokale maksimums og minimumspunkt til f.

c) En flate S er gitt implisitt ved $z^2(1-z) + x^2 + 3y^2 = 0$. Vis at punktet P med koordinater $(1, 1, 2)$ ligger på grafen til både f og g.

Finn en normalvektor til flaten S i punktet P.

d) En kurve er gitt ved å ta snittet av grafen til f og flaten S. Parametriser tangentlinjen til denne kurven i punktet P.

5

a) Finn tangentplanet til

$$z = f(x,y) = 2 + xy - xe^{x+2y}$$

i punktet $(2,-1,-2)$.

b) Bestem alle retningsvektorene slik at den retningsderiverte til

$$f(x,y) = xy - y^2$$

i punktet $(2,3)$ er lik 3.

6

a) Regn ut determinanten til 4×4 matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Finn egenverdiene til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 9i & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonaliser matrisen M.

7

a) Vis at 2 og -3 er egenverdier til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} -1.2 & -2.4 \\ -2.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

og diagonaliser matrisen M.

b) Bestem den generelle løsningen til likningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -1.2y_1 - 2.4y_2 \\ y_2' &= -2.4y_1 + 0.2y_2 \end{aligned}$$

c) Finn løsningen til likningssystemet i *b*) som oppfyller initialbetingelsen $y_1(0) = 10$ og $y_1'(0) = 0$.

Noen Taylor rekker

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{hvor} \quad 0! = 1 \text{ og } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Gradientenvektoren til $f(x,y)$ er $\nabla f = [f_x(x,y), f_y(x,y)]$.

Den retningsderiverte til $f(x,y)$ i retning $\mathbf{u}$ (hvor $|\mathbf{u}|=1$) er

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \bullet u$$

Likningen til tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $(a, b, f(a,b))$ er

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$