Eksamen i	BYPE2000 - Matematikk 2000
Dato:	6. juni 2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	7 (20 deloppgaver)
Antall sider:	4
Vedlegg:	Noen formler
Hjelpemiddel:	Ingen

Alle svarene skal grunngis. Alle deloppgavene teller like mye.

Løsningsforslag

1

Avgjør om følgende rekker konvergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

Dette er en geometrisk rekke med faktor $e^{-1} = 1/e$. Dette tallet har tallverdi mindre enn 1, så rekken konvergerer. Summen til rekken er $1/(1-1/e) = \underline{e/(e-1)}$.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n-1}}$$

Leddene er lik

$$\frac{3^n}{2^{2n-1}} = \frac{3^n}{(2^2)^n \cdot 2^{-1}} = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Dette er en geometrisk rekke med faktor 3/4 som har tallverdi mindre enn 1. Rekken konvergerer og har sum lik

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m = \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot \frac{1}{1-3/4} = \frac{6}{4-3} = \underline{6}$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

Vi har at $n/n!$ er lik 0 hvis n er lik 0 og $1/(n-1)!$ hvis n er positiv. Siden begge rekkene $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n-1)! = \sum_{m=0}^{\infty} 1/m!$ og $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ eksisterer og har sum lik e så er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

lik $e - e = \underline{0}$.

2

Avgjør om følgende rekker konvergerer absolutt, betinget eller ingen av delene. Du trenger ikke finne summen selv om rekkene konvergerer.

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2)}$$

Siden $1/\ln(n^2) = 1/(2\ln(n))$ er avtagende og går mot 0 når n går mot uendelig så vil den alternerende rekken konvergere. Rekken divergerer absolutt siden $1/(2\ln(n)) > 1/2n$ for $n \geq 2$ og rekken $\sum_{n=2}^{\infty} 1/2n$ divergerer. Det er en p-rekke med $p = 1$.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

Når n er et partall er $\sin(\pi n/2)$ lik 0. Når n er oddetallet $2m+1$ er $\sin(\pi n/2)$ lik $(-1)^m$. Rekken er derfor lik

$$(4/\pi) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Denne rekken konvergerer betinget, men divergerer absolutt. Faktisk er summen til rekken lik 1 (Vi viste det ved å benytte Fourier rekker).

c)

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2n^3 - 3n + 2 + (-3n)^5}{\sqrt{n}(3n^4 - 6n^3 + 3n^6)}$$

Vi ser at høyeste eksponent til n i teller er 5, mens høyeste eksponent til n i nevner er 6.5. Ved å sammenligne med den konvergente p-rekken hvor p er lik 1.5 følger det at rekken konvergerer absolutt.

3

a) Bestem Taylor rekkene om $x = 0$ til $\sin(x^2)$ og til $(e^{-x^3} - 1)/x^2$.

Vi setter inn x^2 i Taylor rekken til sin og får

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - + \cdots$$

Taylor rekken til $(e^{-x^3} - 1)/x^2$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n-2}}{n!}$$

b) Bestem Taylor rekken om $x = 0$ til $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$. Vis at potensrekken er en alternerende rekke for alle x mellom 0 og 1. Forklar hvorfor differansen mellom $f(x)$ og Taylor rekken, hvor du tar med leddene opp til og med grad 10, har absoluttverdi mindre enn 1/1320, for alle x slik at $0 < x < 1$.

Vi integrerer leddvis

$$\int_0^x \sin(t^2)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{6 \cdot 7} + \frac{x^{11}}{120 \cdot 11} - + \cdots$$

Dette er en alternerende rekke sidene fortegnene alternerer når $x > 0$. Hvis x også er mindre enn eller lik 1 da er størrelsen på leddene avtagende. Vi har da at differansen mellom integralet og polynomet $x^3/3 - x^7/6 \cdot 7$ er mindre enn størrelsen til det neste leddet som er

$$\frac{x^{11}}{120 \cdot 11} \leq \frac{1}{1320}$$

4

a) Bestem alle første og andre ordens deriverte til funksjonen

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$$

med den naturlige definisjonsmengden.

$$f_x = 2x + y - 3 \qquad f_y = 2y + x + 3$$

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 1$$

b) Bestem tangentplanet til grafen til $f(x, y)$ i punktet $(1, 2)$. Regn ut den retningsderiverte til f i retning $\mathbf{u} = [0.6, 0.8]$ i punktet $(1, 2)$. I hvilke retning er den retningsderiverte til f i punktet $(1, 2)$ lik 0?

I punktet $(1, 2)$ er $f(1, 2) = 1 + 2 + 4 - 3 + 6 = 10$, $f_x(1, 2) = 2 + 2 - 3 = 1$ og $f_y(1, 2) = 4 + 1 + 3 = 8$. Tangentplanet er derfor gitt med $\underline{z = 10 + (x - 1) + 8(y - 2) = x + 8y - 7}$.

Den retningsderiverte i retningen $\mathbf{u} = [0.6, 0.8]$ er

$$[0.6, 0.8] \bullet [1, 8] = 0.6 + 6.4 = \underline{7}$$

Den retningsderiverte er 0 i retningene vinkelrett på retningen til gradientvektoren $[1, 5]$. Det er retningene $\underline{[-8, 1]/\sqrt{65}}$ og $\underline{-[-8, 1]/\sqrt{65}}$.

c) Bestem de kritiske punktene til f og finn ut hvilken type de er. Finn de globale maksimums- og minimumsverdiene til f, hvis de eksisterer.

Funksjonen har ikke noen randpunkt, og den er kontinuerlig deriverbar i alle punkt. De kritiske punktene er derfor punkt hvor gradienten er lik vektoren $\mathbf{0}$. Det vil si $2x + y - 3 = 0$ og $2y + x + 3 = 0$. Løsningen er $y = -3$ og $x = 3$. Verdien til f i punktet $(3, -3)$ er $9 - 9 + 9 - 9 - 9 = \underline{-9}$. Hessematrisen i dette punktet er

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinanten er lik $4 - 1 = 3$. Diagonalelementene er positive, så vi har et lokalt minumumspunkt i $(3, -3)$ ved andrederiverttesten. Dette er et globalt minimumspunkt. Funksjonen kan ta vilkårlig store verdier så den kan ikke ha en maksimumsverdi.

d) Vi avgrenser nå definisjonsmengden til delmengden D av planet som består av alle (x, y) slik at $y \leq 0$ og $x \geq 0$. Finn alle lokale maksimumspunkt og minimumspunkt til f avgrenset til D.

Vi sjekker randen gitt ved $y = 0$ og $x \geq 0$. Da er $f(x, 0) = x^2 - 3x = x(x - 3)$. Dette er en parabel. Den har en minimumsverdi i $x = 3/2$. Dette er ikke et lokalt minimumspunkt siden $f(x, y)$ fortsetter å avta hvis vi går vertikalt nedover fra dette punktet:

$$f(3/2, y) = (3/2)^2 + 3y/2 + y^2 - 9/2 + 3y$$

Tilsvarende på linjen $x = 0$ og $y \leq 0$. Det er et minimumspunkt i $y = -3/2$ på linjestykke, men det er ikke et lokalt minimumspunkt for f avgrenset til D. Det gjenstår å sjekke origo (0.0). Dette punktet er et lokalt maksimumspunkt, siden funksjonen er mindre enn $f(0, 0) = 0$ for små verdier i D. Vi har derfor et lokalt (og globalt) minimumspunkt i $(3, -3)$ og et lokalt maksimumspunkt i $(0, 0)$.

5

a) BMI indeksen (Body-Mass-Index) er gitt som massen delt på kvadratet av høyden. BMI blir vanligvis uttrykt i enheten kg/m^2. Anta at massen måles med en relativ unøyaktighet på 0.3% og at høyden måles med en relativ unøyaktighet på 0.2%. Hva er den relative unøyaktigheten til BMI indeksen når høyden måles til 1.840 m og vekten til 84.00 kg. (BMI er da lik 24.81 kg/m^2.)

Vi har at $BMI = m/h^2$ hvor m er massen og h er høyden. Differensialet er $d(BMI) = dm/h^2 - 2mdh/h^3$. Derfor er $d(BMI)/BMI = dm/m - 2dh/h$. Den relative unøyaktigheten av BMI er uavhengig av verdiene til høyden og massen, og den er lik $0.3\% + 2|-0.2\%| = \underline{0.7\%}$.

b) Avgjør om grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y - 2x|}{2|x| + |y|}$$

eksisterer eller ikke. Bestem grensen hvis den eksisterer.

Denne grensen eksisterer ikke. Langs begge koordinataskene er grensen lik 1, men langs aksen $x = y$ så er grensen lik $\lim_{x\to 0} \frac{|x-2x|}{2|x|+|x|} = 1/3$. Dette er to forskjellige verdier så grensen kan ikke eksistere.

6

a) Regn ut determinanten til 3×3 matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -6 & 12 & 18 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi kan ta ut faktoren 2 fra første rad, faktoren 6 fra andre rad, og deretter faktoren 3 fra tredje søyle. Da får vi

$$2 \cdot 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ved å trekke i fra rad 3 i rad 1 og legge til rad 3 til rad 2 får vi

$$2 \cdot 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 36 \cdot ((-1)^{1+2} 2(0-2)) = \underline{144}$$

b) Kan matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

diagonaliseres (over komplekse tall)? Hvis ja, diagonaliser matrisen C.

Denne matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 + 4 = 0$. Matrisen har derfor to ulike egenverdier $2i$ og $-2i$. Siden den da har to lineært uavhengige egenvektoreer vil de utspenne hele vektorrommet. Matrisen kan derfor diagonaliseres. Egenvektorene må tilfredstille

$$\begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

for egenverdi $2i$ og den konjugerte likningen for egenverdien $-2i$. En egenvektor til $2i$ er derfor $[2i, 1]$ og en egenvektore til $-2i$ er $[-2i, 1]$. Med disse valgene av egenvektorer og med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$$

er derfor

$$P = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversmatrisen til P er

$$P^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -1 & 2i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -i & 2 \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

En diagonalisering er derfor

$$C = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -i & 2 \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

7

a) Diagonaliser den symmetriske matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Finn også en diagonalisering av matrisen $M/10$.

Den karakteristiske likningen er

$$\begin{aligned}(9-\lambda)(6-\lambda) - (-2)^2 &= 54 - 15\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0\end{aligned}$$

Egenverdiene er derfor 5 og 10.

En normalisert egenvektor til $\lambda = 5$ er $[1, 2]/\sqrt{5}$ og en normalisert egenvektor til $\lambda = 10$ er $[2, -1]/\sqrt{5}$. Hvis diagonalmatrisen er

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

er derfor

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dette er en ortogonal matrise så $P^{-1} = P^T$.

En diagonalisering av M er

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

En diagonalisering av $M/10$ er

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Regn ut potensen $(M/10)^7$. Avgjør om grensen $\lim_{n\to\infty} (M/10)^n$ eksisterer og finn grensen hvis den eksisterer.

Diagonalmatrisen til $M/10$ er

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\lim_{n\to\infty} (M/10)^n = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Potensen $(M/10)^7$ er derimot lik

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/128 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + 1/128 & -2 + 1/64 \\ -2 + 1/64 & 1 + 1/32 \end{bmatrix}$$

c) Bestem den generelle løsningen til likningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 0.9y_1 - 0.2y_2 \\ y_2' &= -0.2y_1 + 0.6y_2 \end{aligned}$$

Vi benytter deloppgave *b*) og løser differensiallikningene for systemet av differensiallikninger gitt ved den diagonale matrisen D. Løsningene til likningene er

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} k_1 e^{t/2} \\ k_2 e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} k_1 e^{t/2} + 2k_2 e^t \\ 2k_1 e^{t/2} - k_2 e^t \end{bmatrix}$$

for konstanter k_1 og k_2.

d) Finn løsningen til likningssystemet i *c*) som oppfyller initialbetingelsen $y_1(0) = 14$ og $y_2(0) = 3$. Setter vi $t = 0$ får vi likningene $\frac{1}{\sqrt{5}}(k_1 + 2k_2) = 14$ og $\frac{1}{\sqrt{5}}(2k_1 - k_2) = 3$. Løsningene er $k_1 = 4\sqrt{5}$ og $k_2 = 5\sqrt{5}$. De partikulære løsningene er derfor

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{t/2} + 10e^t \\ 8e^{t/2} - 5e^t \end{bmatrix}$$

Noen Taylor rekker

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{hvor} \quad 0! = 1 \text{ og } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Gradientenvektoren til $f(x,y)$ er $\nabla f = [f_x(x,y), f_y(x,y)]$.

Den retningsderiverte til $f(x,y)$ i retning $\mathbf{u}$ (hvor $|\mathbf{u}|$=1) er

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \bullet u$$

Likningen til tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $(a, b, f(a,b))$ er

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$