Prøveeksamen 6 mai 2014

1 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n-1}}{2^{2n}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - (\frac{1}{3}) 3^n}{4^n}$ (siden $2^{2n} = (2^2)^n$)

$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{4})^n - \frac{1}{3} (\frac{3}{4})^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n - \frac{1}{3} (\frac{3}{4})^n$ dette er en differanse av to geometriske rekker

$= \frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-3/4}$

$= 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4-3} = 2 - \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$

Dette minner oss om den deriverte til den geometriske rekken:

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ for $|x| < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} \cdot (\frac{1}{2})^2$ $\quad \frac{1}{2} < 1$ så rekken konvergerer

$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1-1/2}\right)^2 = \underline{\underline{1}}$

c) Rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n)!}$ minner om

rekken til e^x og $\cos x$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{alle } x.$$

Så $$e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Summen deres er

$$e + \frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\overbrace{1+(-1)^n}^{2 \text{ når } n \text{ er jevn, } 0 \text{ når } n \text{ er odde}}\Big)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m)!}$$

Så $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n)!} = \underline{\underline{e + \frac{1}{e}}}$$

2 a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln((n+3)^n)}.$$

Vi studerer absoluttverdien til ledd n:

$$\left|\frac{(-1)^n}{\ln((n+3)^n)}\right| = \frac{1}{n \ln(n+3)} \quad \text{(ved logaritmereglene)}$$

Dette minner oss om $\sum^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ som vi vet divergerer ved integraltesten.

$\lim \frac{n \ln(n+3)}{n \ln n} = 1$, så ved grensesammen-

likningstesten divergerer $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n \ln(n+3)} \right|$ også

Leddene $\frac{1}{n \ln(n+3)}$ er positive avtagende,

og i grensen går de mot 0 (når $n \to \infty$).

Derfor konvergerer den alternerende

rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+3)}$.

Rekken er dermed betinget konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}\, \sqrt[3]{2n+2}\, \sqrt[4]{3n+1}}$.

La $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+3}\, \sqrt[3]{2n+2}\, \sqrt[4]{3n+1}} = (n+3)^{-1/2} \cdot (2n+2)^{-1/3} (3n+1)^{-1/4}$.

Da er $f(n) > 0$ for $n = 1$

$f(n)$ er også avtagende og $f(n)$ går mot

0 når n går mot uendelig.

Rekken konvergerer derfor.

Vi skal nå avgjøre om rekken konvergerer absolutt.

Når n er stor er $f(n)$ veldig lik

$n^{-1/2} \cdot (2n)^{-1/3} \cdot (3n)^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\, \sqrt[4]{3}} \cdot n^{-13/12}$.

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{1}{n^{13/12}}$

konvergerer siden dette er en p-rekke (opp til å gange med en konstant) og $p = 13/12 > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \cdot \sqrt[3]{2}\sqrt[4]{3} \cdot n^{13/12} = 1$$

Så ved grensesammenligningstesten konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ også.

Vi konkluderer med at rekken konvergerer **absolutt**

c) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer siden det er en p-rekke med $p = 2 > 1$.
(vi vet også fra Fourier-rekke forelesningene at summen er $\pi^2/6$.)

Grensen $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot n^2 = 1$

så Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **konvergerer absolutt**

Merk at $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$ for $n \geq 1$.

3 a) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $|x|<1$ (og $x=-1$)

Erstatter vi x med $-x^3$ får vi

$$\ln(1+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n}}{n} \qquad |x|<1 \quad (\text{og } x=1)$$

Deriverer vi den geometriske rekken leddvis får vi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

b) $f^{(10)}(0)$ er lik $10!$ ganget med koeff. til x^{10} i Tayler rekken til f. Vi finner koeffisienten:

$$\underbrace{(1+x+x^2+\cdots)}_{\frac{1}{1-x}}\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - + \cdots\right)$$

$$= \cdots + \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right)x^{10} + \cdots$$

Koeffisienten til x^{10} er lik

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{120 - 20 + 1}{120} = \frac{101}{120}$$

$$f^{(10)}(0) = 10! \cdot \frac{101}{120} = \underline{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 101}$$

4 a) $f = 3x^2 + y^3 + 6xy - 9y$

$f_x = 6x + 6y$

$f_y = 3y^2 + 6x - 9$

$f_{xx} = 6$ $\qquad$ $f_{yy} = 6y$

$f_{xy} = 6$

b) $\vec{\nabla} f(-1,1) = [0, -12]$

$f(-1,1) = 3 + 1 - 6 - 9 = -11$

Tangentplanet er gitt ved

$z = -11 - 12(y-1) = \underline{1 - 12y}$

Den retningsderiverte i punktet $(-1,1)$ er størst i retningen $\underline{[0,-12]}$

c) f er kontinuerlig deriverbar i alle punkt. Den har heller ingen randpunkt. Det gjenstår å finne punkt slik at $\vec{\nabla} f = \vec{0}$.

$6x + 6y = 0$: $x + y = 0$, $\underline{x = -y}$

$3y^2 + 6x - 9 = 3(y^2 - \underline{2y} - 3) = 0$

$(y-3)(y+1) = 0$

De kritiske punktene er

$\underline{(1,-1)}$ og $\underline{(-3,3)}$

Vi benytter 2. derivert testen.

Diskriminanten er $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6y \end{vmatrix}$

$\Delta = \underline{36(y-1)}$

$(1,-1)$: $\Delta = 36(-1-1) < 0$: <u>Sadelpunkt</u>

$(-3,3)$ $\Delta = 36(3-1) > 0$ og $f_{xx} = 6 > 0$

: <u>minimumspunkt</u>

$f(-3,3) = 3(-3)^2 + (3)^3 + 6(-3)(3) - 9(3)$

$= -2\,3^3 - 3^3 = -3^4 = \underline{-81}$

$(-3,3,-81)$ er et <u>lokalt</u> minimumspunkt

$(1,-1,5)$ er et <u>sadelpunkt</u>

f har ingen globale maksimums/minimumsverdier.

For eksempel er $f(0,y) = y^3 - 9y = y(y^2-9)$

som kan ta vilkårlig store positive og negative verdier.

4 d) De kritiske punktene til f ligger på linjen $-x = y$

På denne linjen er funksjonen lik

$$f(x,-x) = 3x^2 - x^3 - 6x\cdot x + 9x$$
$$= -x^3 - 3x^2 + 9x$$

Den deriverte til denne funksjonen er

$$-3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2 + 2x - 3)$$
$$= -3(x+3)(x-1)$$

Fortegn $\quad -3 \quad 1$

Funksjonen f avgrenset til linjen $y + x = 0$ har lokalt maksimumspunkt i $(1,-1,5)$ og lokalt minimumspunkt i $(-3,3,-81)$

5 a) $h(x,y,z) = x^2 - 3xy + y^3 + z^4$

$h(-2,1,-1) = 4 + 6 + 1 + 1 = \underline{12}$

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leq 1\%$ $\quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \leq 1\%$ $\quad \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq 1\%$.

$$\Delta h(P) = h_x(P)\Delta x + h_y(P)\Delta y + h_z(P)\Delta z$$

$h_x = 2x - 3y$ $\qquad h_x(P) = -7$

$h_y = -3x + 3y^2$ $\qquad h_y(P) = 9$

$h_z = 4z^3$ $\qquad h_z(P) = 4$

$$\left|\frac{\Delta h}{h}\right| \leq \frac{1}{12}\left(|-7|\left|\frac{1}{100}\cdot -2\right| + |9|\left|\frac{1}{100}\cdot 1\right| + |4|\left|\frac{1}{100}(-1)\right|\right)$$

$$\leq \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{12}\left(7\cdot 2 + 9 + 4\right) = \frac{27}{12}\%$$

$$= \underline{\underline{2.25\%}}$$

b) Grensen eksisterer og er lik 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^3 - x^2y^2 - y^3}{x^2+y^2} = \underline{1}$$

siden $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x|$

$\left|\frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |y^2|$

$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq |y|$

6

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & -1 & a \\ 2a & 2c & c \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & a \\ 2c & c \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2a & c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a & 2c \end{vmatrix}$$

$$= (-c - 2ac) - (c - 2a^2) + 2c(c+a)$$

$$= 2a^2 + 2c^2 - 2c = \underline{2(a^2+c^2-c)}$$

λ er en egenverdi til $A \iff \det|A - \lambda I| = 0$

Så $\lambda = 0$ er en egenverdi til $A \iff \det A = 0$.

0 er en egenverdi til matrisen $\iff$

$$a^2 + c^2 - c = 0.$$

Vi skriver om likningen, ved å fullføre kvadratet, og tolker løsningen geometrisk:

$$a^2 + \left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

Dette er en sirkel med senter i $(a,c) = \underline{(0, \tfrac{1}{2})}$ og radius lik $\underline{1/2}$

b) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ $\quad D^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ etc.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{2m}}{(2m)!} = \begin{bmatrix} (e^3 + e^{-3})/2 & 0 \\ 0 & \cos(1) \end{bmatrix}$$

7. $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 13 & -2 \end{bmatrix}$

Karakteristisk likning $\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 13 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(-2-\lambda) + 13 = -4 + 13 + \lambda^2 = \lambda^2 + 9 = 0$

$\lambda = +3i$ $\quad \underline{\lambda = -3i}$ er egenverdiene.

Egenvektorer: $(M - \pm 3i)\vec{V} = \vec{0}$ $\quad \vec{V} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 \mp 3i & -1 \\ 13 & -2 \mp 3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\lambda = 3i$ $\quad \lambda = -3i$

$\vec{V} = \begin{bmatrix} 2 \pm 3i \\ 13 \end{bmatrix}$, $\quad \vec{V} = \begin{bmatrix} 2+3i \\ 13 \end{bmatrix}$, $\quad \vec{V} = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 13 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 2+3i & 2-3i \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{bmatrix}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{13 \cdot 6i} \begin{bmatrix} 13 & -2+3i \\ -13 & 2+3i \end{bmatrix}$$

$M = PDP^{-1}$

c)

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} P^{-1}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = D P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

så

$$P^{-1}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{3it} \\ k_2 e^{-3it} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} k_1 e^{3i} \\ k_2 e^{-3i} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} (2+3i)k_1 e^{3it} + (2-3i)k_2 e^{-3it} \\ 13\left(k_1 e^{3it} + k_2 e^{-3it}\right) \end{bmatrix}}$$

$$y_1 = (2+3i)k_1 e^{3i} + (2-3i)k_2 e^{-3i}$$

$$y_1' = 3i\left[(2+3i)k_1 e^{3i} - (2-3i)k_2 e^{-3i}\right]$$

$$y_1(0) = (2+3i)k_1 + (2-3i)k_2 = 2$$

$$3i\left[(2+3i)k_1 - (2-3i)k_2\right] = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2+3i & 2-3i \\ 6i-9 & -6i-9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3i\left[-13-13\right]}\begin{bmatrix} -6i-9 & -(2-3i) \\ -(6i-9) & 2+3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{i}{78} \begin{bmatrix} -12i-18 - 6+9i \\ -12i+18 + 6+9i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{78} \begin{bmatrix} -3i-24 \\ -3i+24 \end{bmatrix} = \underline{\frac{i}{26} \begin{bmatrix} -i+8 \\ -i+8 \end{bmatrix}}$$

$$y_1 = (2+3i)\frac{i(-i-8)}{26} e^{3i} + \underbrace{(2-3i)\frac{i}{26}(-i+8)\, e^{-3i}}_{\text{kompleks konj. av forrige ledd}}$$

$$= 2\mathrm{Re}\ (2+3i)\frac{i}{26}(-i-8)e^{3i}$$

$$= 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{26}(2+3i)(1-8i)(\cos(3t) + i\sin 3t)\right)$$

$$= \frac{1}{13}\mathrm{Re}\left(\left((2+24) + i(3-16)\right)(\cos(3t) + i\sin 3t)\right)$$

$$= \frac{1}{13}\left(26\cos(3t) + 13\sin(3t)\right)$$

$$= \underline{2\cos(3t) + \sin(3t)}$$

$$y_2 = 13\left(k_1 e^{3it} + k_2 e^{-3it}\right) = \frac{i}{2}\left((-i-8)e^{3it} + (-i+8)e^{-3it}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-8i)e^{3it} + (1+8i)e^{-3it}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left((1-8i)e^{3it}\right)$$

$$y_2 = \underline{\cos(3t) + 8\sin(3t)}$$

$\longrightarrow$

c) Vi gir nå en alternativ fremgangsmåte som involverer mindre regning.

Fra første del av c) vet vi at både y_1 og y_2 er lineære kombinasjoner av $\cos(3t)$ og $\sin(3t)$ siden løsningene skal være reelle.

Vi oversetter kravet til $y_1'(0)$ til et krav til y_2:

$y_1'(0) = 2y_1(0) - y_2(0)$ så $y_2(0) = 2y_1(0) - y_1'(0)$
$= 1$.

$y_1 = a\cos(3t) + b\sin(3t)$

$y_2 = c\cos(3t) + b\sin(3t)$.

$y_1(0) = a = 2$ $\qquad$ $y_2(0) = c = 1$

$y_1'(0) = 3b = 3$ så $b = 1$

$y_2'(0) = 3d = 13y_1(0) - 2y_2(0) = 13 \cdot 2 - 2 = 24$

så $d = 8$

Dette gir: $y_1 = 2\cos(3t) + \sin(3t)$

$y_2 = \cos(3t) + 8\sin(3t)$